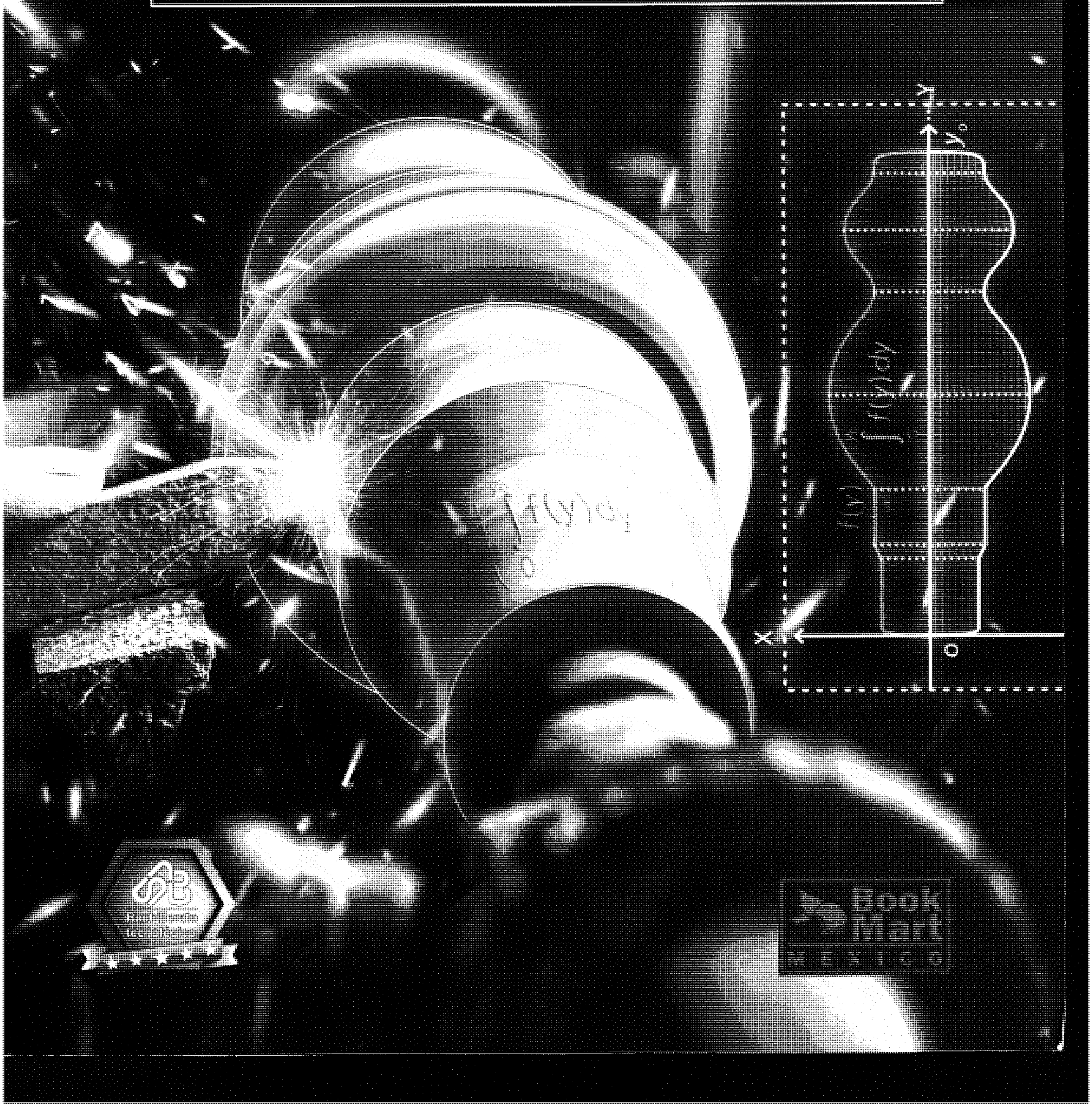
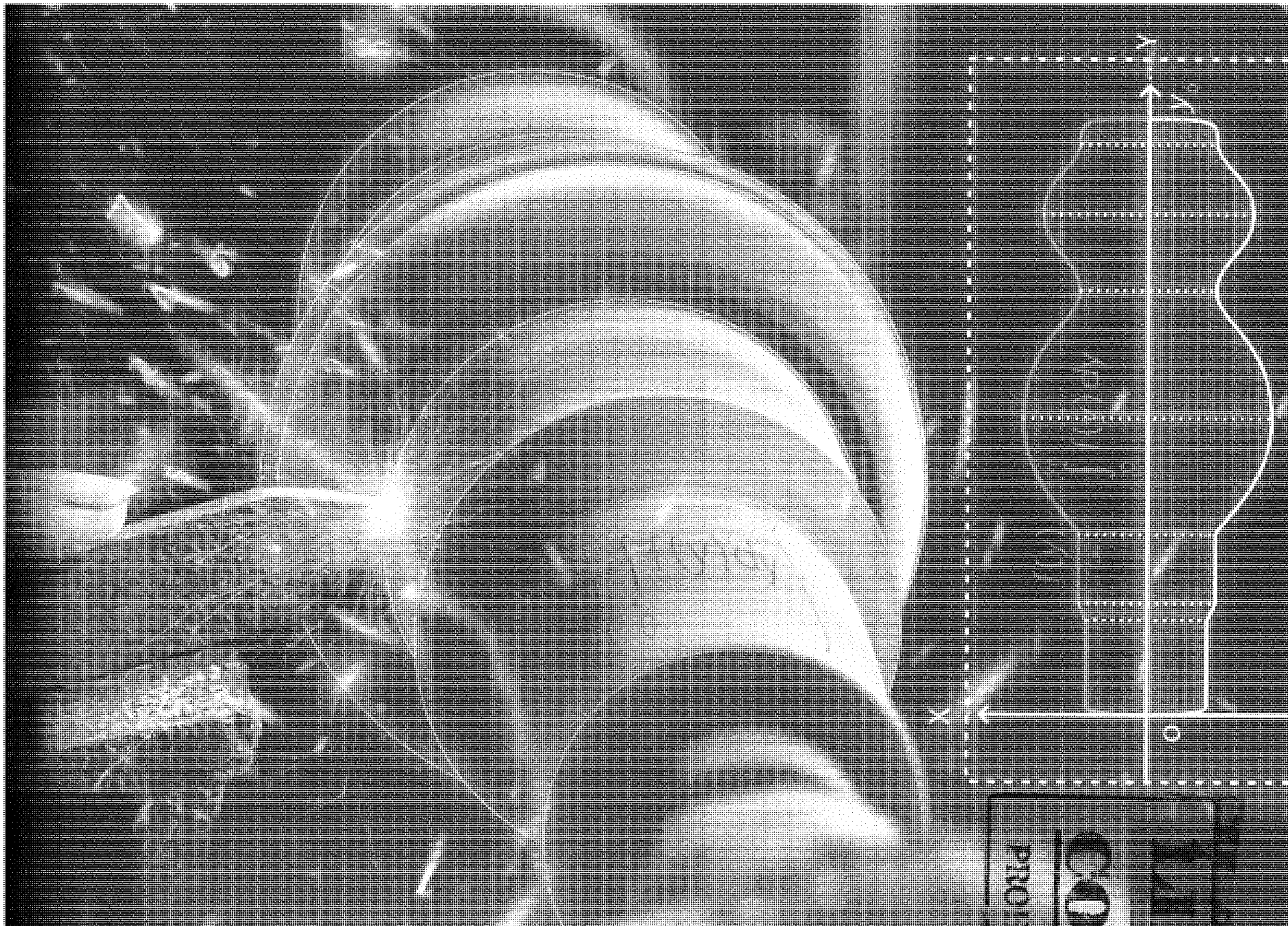
Faustino Agustín Romano Velázquez

Cálculo integral



Book Mart
MÉXICO



LIBRO DE CORTESÍA
PROHIBIDA SU VENTA

Faustino Agustín Romano Velázquez

Cálculo integral

Book Mart
MÉXICO MR

Coordinación editorial
Rolando Roberto Linaldi Guzmán

Editor
Ángel Fernando Flores Reyes

Revisión técnica
Karina Isidro Mora

Corrección de estilo
Lidya Arana Lagos

Arte de portada
Osciel Máximo Fierro

Diagramación e
iconografía.
César García Rueda
Genaro Aguilar Rivera

Fotografía
Shutterstock

Producción
Francisco Javier Martínez García

C251&

Autor
Faustino Agustín Romano Velázquez

Cálculo integral

1ª edición, 2019
1ª reimpresión, 2020
D. R. © Book Mart, S. A. de C. V.

www.bookmart.com.mx

ISBN: 978-607-632-076-1

Miembro de la Cámara Nacional
de la Industria Editorial Mexicana

Registro número 3740

No está permitida la reproducción total o parcial de este libro ni su tratamiento informático ni la transmisión de ninguna forma o por cualquier medio, ya sea electrónico, mecánico, incluyendo fotocopiado, almacenamiento en cualquier sistema de recuperación de información o grabado sin el permiso previo y por escrito de los titulares del *copyright*.

La marca Book Mart es propiedad
de Book Mart, S. A. de C. V.
Prohibida su reproducción total o parcial.

Impreso en México / *Printed in Mexico*

Presentación

Estudiante:

Editorial Book Mart presenta esta obra, generada a partir del Nuevo Modelo Educativo. Hemos puesto toda nuestra experiencia y esfuerzo para producir material que realmente facilite y proyecte tu aprendizaje.

Nos damos cuenta de que tú y tu presente exigen una mejor educación, más plural, democrática e incluyente. Sabemos que nuestro país es diverso y contiene una multiplicidad de identidades, perspectivas y culturas, a las cuales perteneces. Reconocemos tu derecho a una educación que te permita desarrollarte plena y armónicamente como ser humano. Con todo ello en mente, y atendiendo los nuevos programas de estudio, nuestro equipo de expertos ha elaborado cuidadosamente este libro de texto para ti.

Esta obra te guiará de forma amena y creativa a través de los conocimientos de esta asignatura, reconociendo tu creatividad y fomentando tu desarrollo. Las actividades están pensadas para que interacciones con tu entorno, a la vez que aprendes y practicas las habilidades y actitudes que solicita el perfil de egreso del bachillerato.

Este material didáctico fomenta un aprendizaje integral. Por ello, además de cubrir los conocimientos teóricos, logrará desarrollar tus habilidades socioemocionales, dialogar con las otras asignaturas de tu semestre, y fomentar tu sentido de pertenencia y amor por México; también te ofrecerá recursos tecnológicos de vanguardia y fomentará tu apertura intelectual, tu sentido de responsabilidad, tu autoconocimiento y tus habilidades de trabajo en equipo y colaboración.

Además, encontrarás herramientas que te permitirán involucrarte más en tu propia evaluación de conocimientos, habilidades y actitudes, con el objetivo de ir más allá de las tradicionales evaluaciones sumativas o numéricas, y transitar hacia evaluaciones verdaderamente formativas.

Te invitamos a sumarte a nuestro esfuerzo para lograr que tus aprendizajes sean significativos y contribuyan a tu pleno desarrollo personal y social. Nuestro país tiene un importante reto educativo por delante, un reto que en este momento se concentra en ti. Por ello, nos complace enormemente acompañarte en este importante trayecto de tu educación media superior.

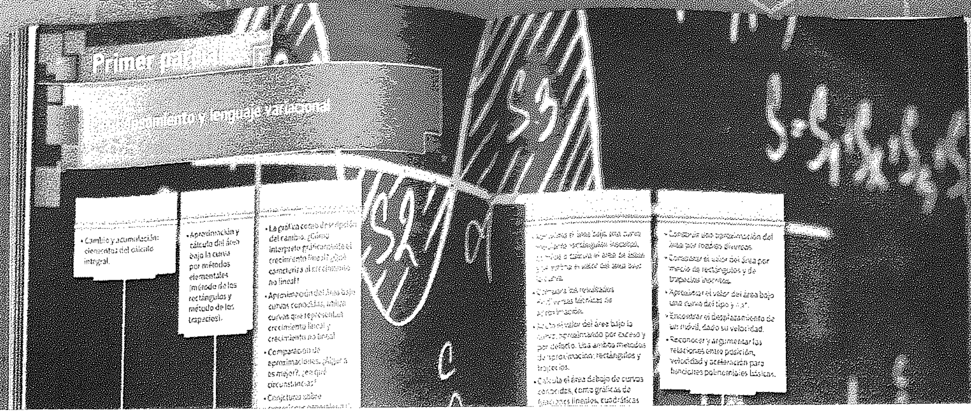
Cordialmente,
Book Mart

Conoce tu libro

Entrada de parcial

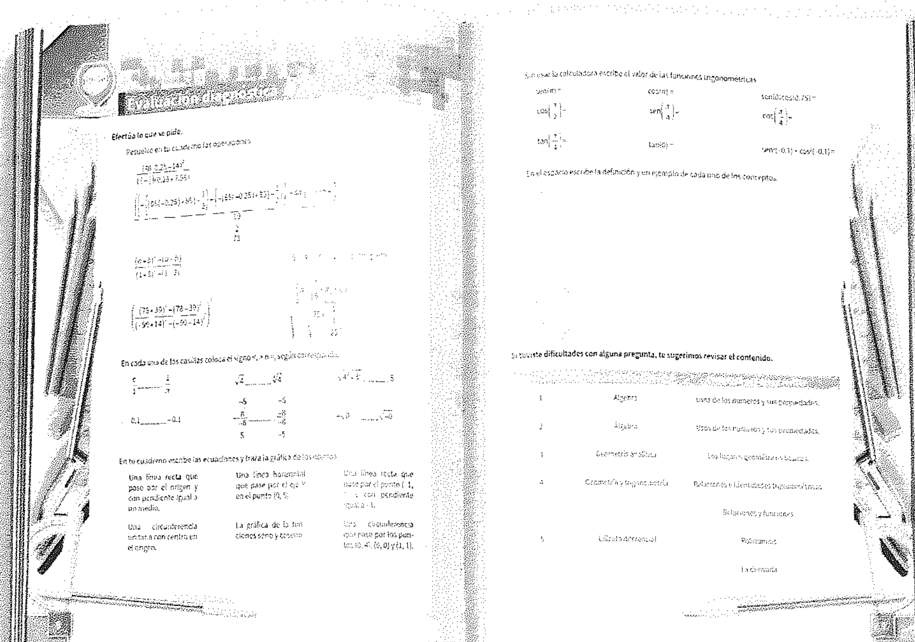
Encontrarás un panorama de lo que aprenderás.

- Eje
- Componentes
- Contenidos centrales
- Contenidos específicos
- Aprendizajes esperados
- Productos esperados



Evaluación diagnóstica

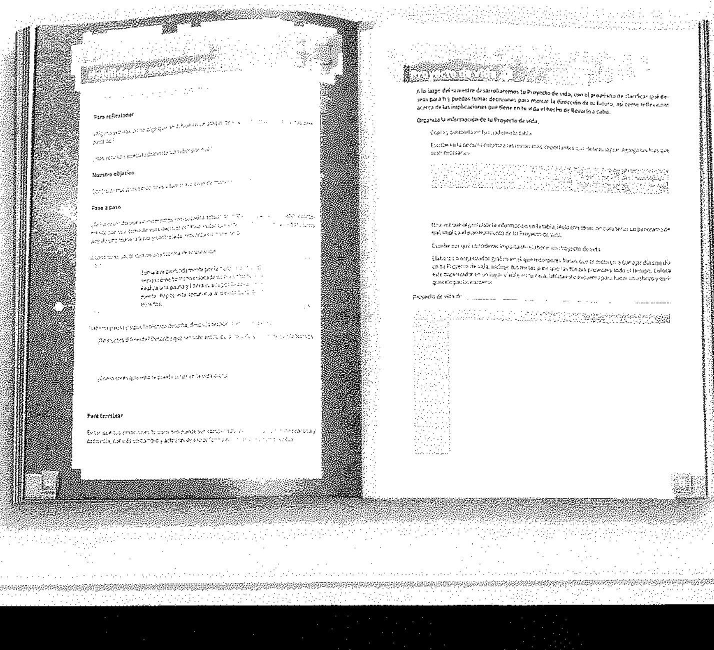
Se ubica al inicio y sirve para identificar tu nivel de conocimientos actuales. No cuenta para tu calificación.

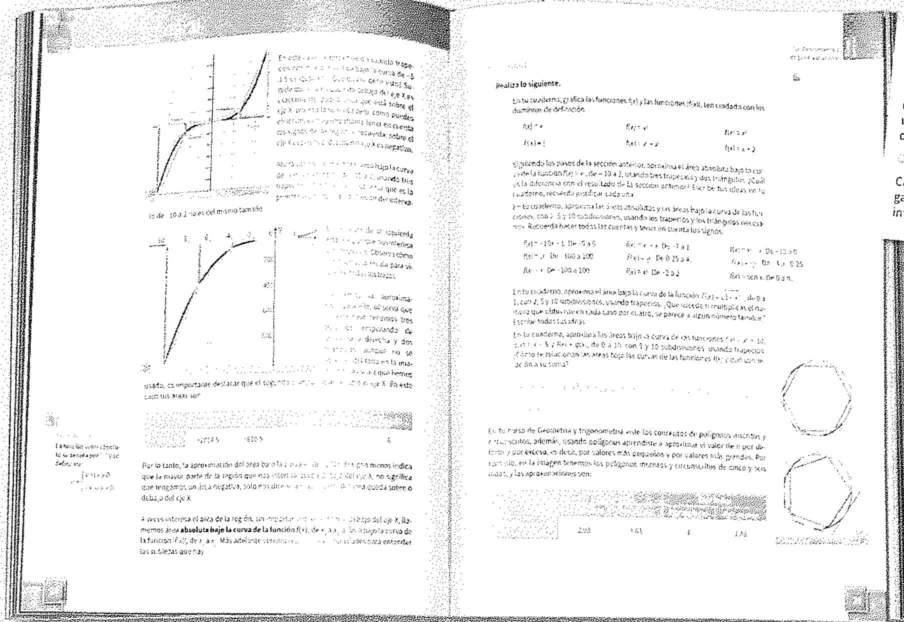


Esta sección, basada en el programa Construye T, está diseñada para desarrollar habilidades socioemocionales, y con ello mejorar el ambiente escolar en los planteles del nivel medio superior. Con estas actividades aprenderás a cultivar relaciones interpersonales sanas, podrás manejar tus emociones y saber cuándo solicitar apoyo para enfrentar de manera positiva y asertiva las vicisitudes de la vida en general.

Proyecto de vida

Esta sección presenta situaciones y actividades que te ayudarán a tomar decisiones para vislumbrar oportunidades, aprender a enfrentar riesgos y ubicar las condiciones que pueden generarte bienestar en el presente. Todo ello, con la finalidad de que forjes un plan a corto, mediano y largo plazos, en el que logres potenciar y aprovechar tus capacidades para una vida plena y satisfactoria en todos los ámbitos.





Costo

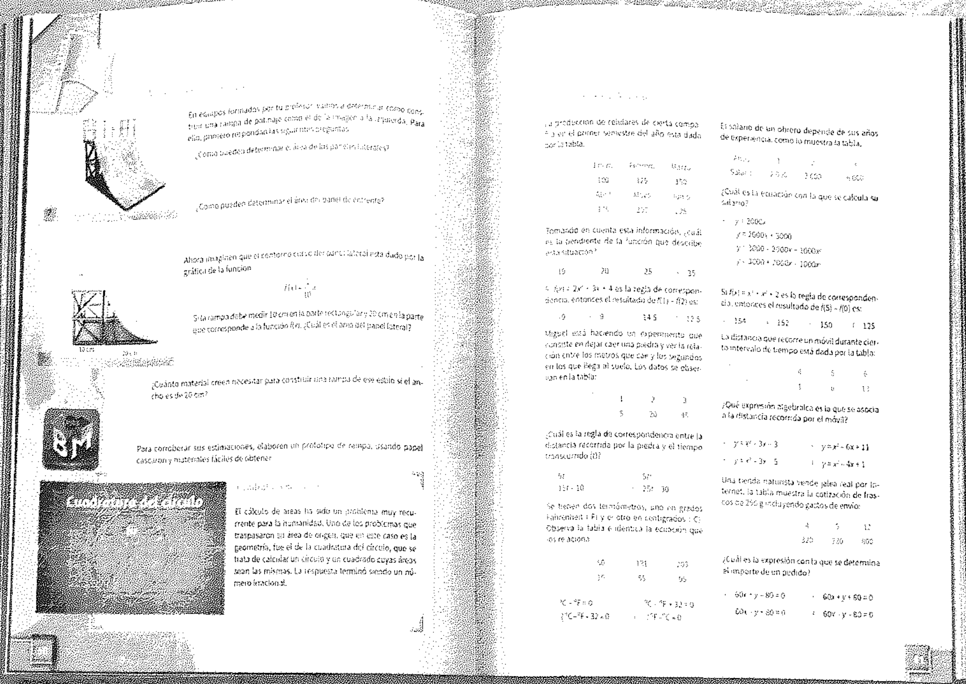
Es el gasto económico que representa la fabricación de un producto o la prestación de un servicio.

Ganancia

Cantidad de dinero que se gana, especialmente con una inversión.

Actividades de aprendizaje

Estas actividades te permitirán lograr los aprendizajes esperados. Presta especial atención a las actividades destacadas en color morado, que vienen marcadas con una etiqueta de Producto esperado, pues son las necesarias para cubrir lo requerido por el programa de estudios de esta asignatura.



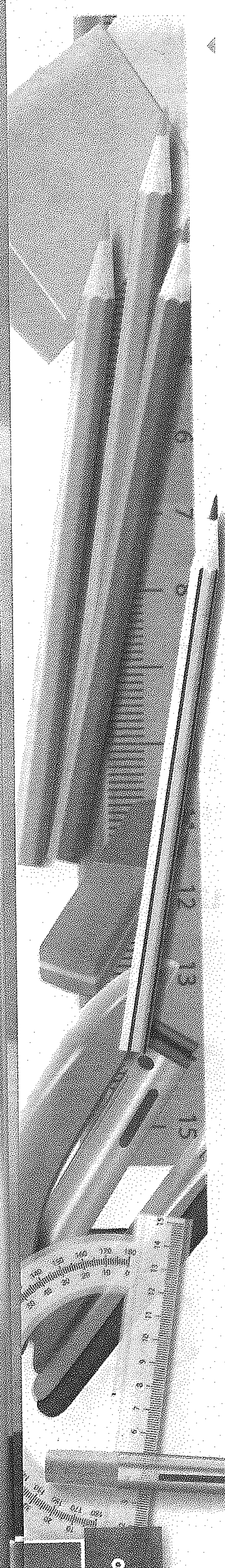
Te preparará para la prueba con el mismo nombre a través de preguntas relacionadas con el contenido del libro.

Actividad al final de cada parcial. En ella tendrás la oportunidad de practicar todo lo que has aprendido. Incluye una rúbrica de evaluación.

Contenido

INICIO

Evaluación diagnóstica



Efectúa lo que se pide.

1. Resuelve en tu cuaderno las operaciones.

a. $\dfrac{(98\cdot 0.25-14)^2}{\left(\frac{3}{2}-\frac{2}{3}\right)(0.28+7.58)}$

b. $\dfrac{\left(\left[-\left\{(85(-0.25)+85)-\dfrac{1}{2}\right\}+\left\{-(85(-0.25)+85)-\dfrac{1}{2}\right\}\right]^3-3\pi\right)-\left(-3\pi+\dfrac{5}{2}\right)}{\dfrac{\frac{19}{2}}{78}}$

c. $\dfrac{(a+b)^2-(a-b)^2}{(1+3)^2-(1-3)^2}$

d. $5^{10}\cdot 4^{100}\cdot 3^{1000}\cdot 2^{10000}\cdot 1^{100000}\cdot 0^{1000000}$

e. $\left(\dfrac{(78+39)^2-(78-39)^2}{(-90+14)^2-(-90-14)^2}\right)^2$

f. $\sqrt{\dfrac{\left(\pi-\left\{\dfrac{8}{5}+\pi\right\}+\sqrt{5^2}\right)}{\sqrt{75+\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{25}\right)}}}}$

2. En cada una de las casillas coloca el signo <, > o =, según corresponda.

a. $\dfrac{e}{1}$ ______ $\dfrac{1}{\pi}$

b. $\sqrt{4}$ ______ $\sqrt[4]{4}$

c. $\sqrt{4^2+3^2}$ ______ 5

d. 0.1 ______ -0.1

e. $-\dfrac{\frac{-5}{8}}{\frac{-8}{5}}$ ______ $\dfrac{\frac{-5}{-8}}{\frac{-8}{-5}}$

f. $-\sqrt{0}$ ______ $\sqrt{-0}$

3. En tu cuaderno escribe las ecuaciones y traza la gráfica de los objetos.

a. Una línea recta que pase por el origen y con pendiente igual a un medio.

b. Una línea horizontal que pase por el eje Y en el punto (0, 5).

c. Una línea recta que pase por el punto (–1, 1) y con pendiente igual a –1.

d. Una circunferencia unitaria con centro en el origen.

e. La gráfica de las funciones seno y coseno.

f. Una circunferencia que pase por los puntos (0, 4), (9, 0) y (1, 1).

4. Sin usar la calculadora escribe el valor de las funciones trigonométricas.

a. $\operatorname{sen}(\pi) =$ b. $\cos(\pi) =$ c. $\operatorname{sen}(0)\cos(0.75) =$

d. $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) =$ e. $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) =$ f. $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) =$

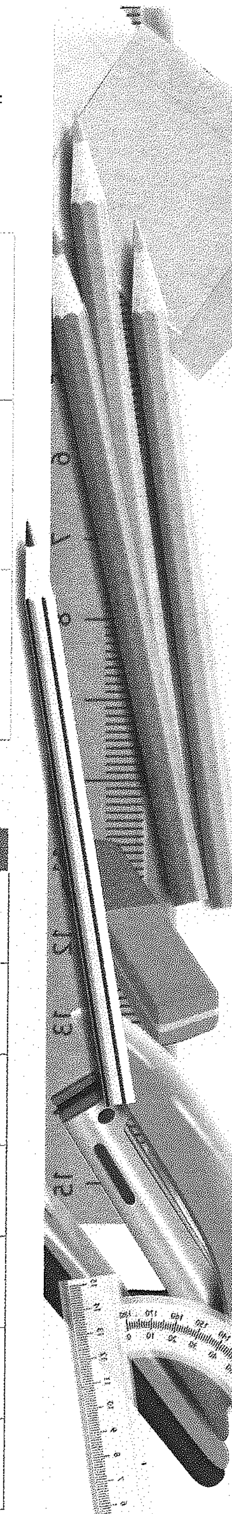
g. $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) =$ h. $\tan(0) =$ i. $\operatorname{sen}^2(-0.1) + \cos^2(-0.1) =$

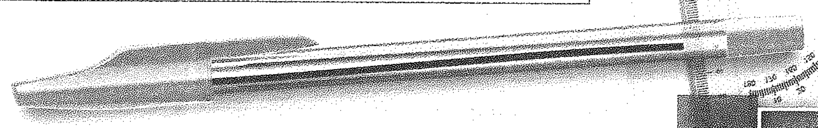
5. En el espacio escribe la definición y un ejemplo de cada uno de los conceptos.

Función:	
Polinomio:	
Derivada:	

Si tuviste dificultades con alguna pregunta, te sugerimos revisar el contenido.

Pregunta número	Asignatura relacionada	Contenido que debes revisar
1	Álgebra	Usos de los números y sus propiedades.
2	Álgebra	Usos de los números y sus propiedades.
3	Geometría analítica	Los lugares geométricos básicos.
4	Geometría y trigonometría	Relaciones e identidades trigonométricas.
5	Cálculo diferencial	Relaciones y funciones.
		Polinomios.
		La derivada.





Primer parcial

Eje: Pensamiento y lenguaje variacional

- Cambio y acumulación: elementos del cálculo integral.

- Aproximación y cálculo del área bajo la curva por métodos elementales (método de los rectángulos y método de los trapecios).

- La gráfica como descripción del cambio. ¿Cómo interpreto gráficamente el crecimiento lineal? ¿Qué caracteriza al crecimiento no lineal?
- Aproximación del área bajo curvas conocidas, utiliza curvas que representan crecimiento lineal y crecimiento no lineal.
- Comparación de aproximaciones. ¿Alguna es mejor?, ¿en qué circunstancias?
- Conjeturar sobre expresiones generales del área bajo la curva (ejemplo el área bajo la gráfica de $f(x) = 1$ o bajo $f(x) = x$, así como el área bajo $f(x) = x^2$, con x entre 0 y 1, o entre 1 y 2, o en general entre a y b, donde $a < b$). Usa el reconocimiento de patrones.
- Interpretación del área según el fenómeno (ejemplo, el área de la función velocidad se interpreta como la distancia recorrida) ¿Por qué las medidas de la acumulación resultan útiles para el tratamiento de diferentes situaciones contextuales?

- Aproxima el área bajo una curva mediante rectángulos inscritos, se mide o calcula el área de éstos y se estima el valor del área bajo la curva.
- Compara los resultados de diversas técnicas de aproximación.
- Acota el valor del área bajo la curva, aproximando por exceso y por defecto. Usa ambos métodos de aproximación: rectángulos y trapecios.
- Calcula el área debajo de curvas conocidas, como gráficas de funciones lineales, cuadráticas y cúbicas entre dos límites de integración.
- Interpreta, por extensión o generalización, el área bajo la curva de gráficas de funciones trigonométricas básicas (seno y coseno).

- Construir una aproximación del área por medios diversos.
- Comparar el valor del área por medio de rectángulos y de trapecios inscritos.
- Aproximar el valor del área bajo una curva del tipo $y = x^n$.
- Encontrar el desplazamiento de un móvil, dado su velocidad.
- Reconocer y argumentar las relaciones entre posición, velocidad y aceleración para funciones polinomiales básicas.

Digital

Cinco minutos conmigo mismo

Para reflexionar

¿Alguna vez has dicho algo que no debías en un ataque de enojo o tristeza y luego te has arrepentido?

¿Has actuado arrebatadamente sin saber por qué?

Nuestro objetivo

Controlar nuestras emociones y tomar acciones de manera calmada.

Paso a paso

¿Te ha ocurrido que en momentos complicados actúas de manera impulsiva sin saber exactamente por qué tomaste esas decisiones? Para evitar que este tipo de cosas te sucedan, toma aire de una manera lenta y controlada, recuerda siempre: respira.

A continuación, te damos una técnica de respiración:

> Toma aire profundamente por la nariz, mientras observas cómo tu mano colocada en el vientre se alza. Realiza una pausa y libera el aire por la boca lentamente. Repite esta secuencia al menos durante 10 minutos.

Haz una pausa y sigue la técnica descrita, después responde estas preguntas:

¿Te sientes diferente? Describe qué sentiste antes, durante y después de seguir la técnica.

____

____

¿Cómo crees que esto te pueda servir en la vida diaria?

____

____

Para terminar

Evitar que tus emociones te dominen puede ser complicado, pero con un poco de práctica y paciencia, notarás un cambio y actuarás de mejor forma en situaciones complicadas.

Proyecto de vida

A lo largo del semestre desarrollaremos tu Proyecto de vida, con el propósito de clarificar qué deseas para ti y puedas tomar decisiones para marcar la dirección de tu futuro, así como reflexionar acerca de las implicaciones que tiene en tu vida el hecho de llevarlo a cabo.

Organiza la información de tu Proyecto de vida.

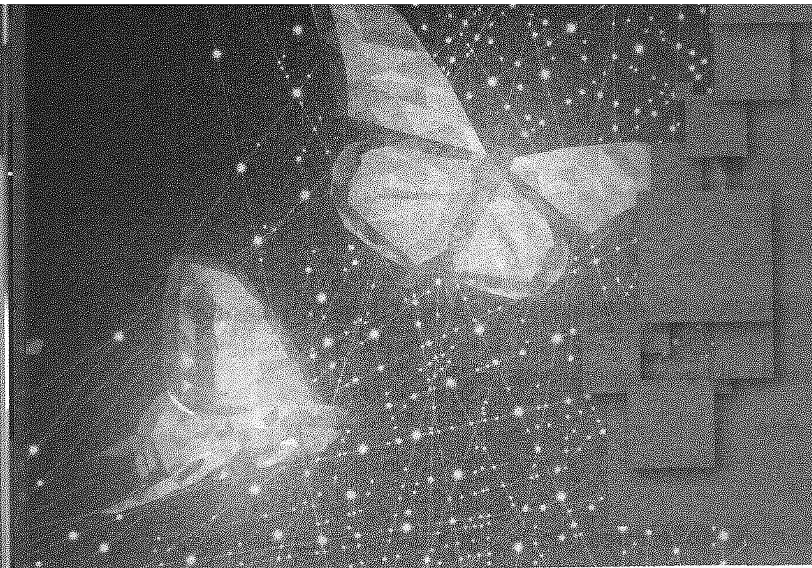
1. Copia y completa en tu cuaderno la tabla.
2. Escribe en la primera columna las metas más importantes que deseas lograr. Agrega las filas que sean necesarias.

Meta	Ideas importantes a rescatar	Acciones que debo realizar	Beneficios que representa para mí	Beneficios que representa para mi entorno

3. Una vez que organizaste la información en la tabla, léela con atención para tener un panorama de qué implica el planteamiento de tu Proyecto de vida.
4. Escribe por qué consideras importante elaborar un Proyecto de vida.
5. Elabora un organizador gráfico en el que incorpores frases que te motiven a trabajar día con día en tu Proyecto de vida, incluye tus metas para que las tengas presentes todo el tiempo. Coloca este organizador en un lugar visible en tu casa. Utiliza este esquema para hacer un esbozo y enriquécelo paulatinamente.

Proyecto de vida de: ______________________________

	Metas a corto plazo	Metas a mediano plazo	Metas a largo plazo
Personal			
Familiar			
Escolar			
Laboral			
Social			



DESARROLLO

La gráfica como descripción del cambio

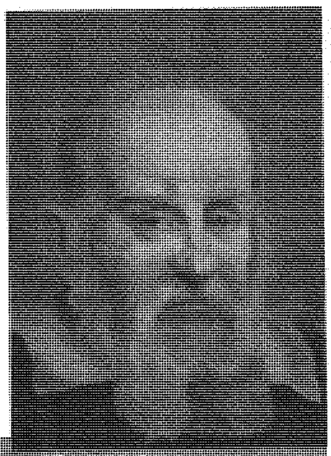


Figura 1.1
Galileo Galilei.

> *Eppur si muove* (Y, sin embargo, se mueve).
>
> Galileo Galilei, 1633.

Para saber más

Eppur si muove es una frase atribuida a Galileo Galilei. La historia dice que pronunció esta frase después de ser obligado a retractarse por el modelo heliocéntrico ante el tribunal de la Santa Inquisición.

Todo cambia, a veces nos gusta el cambio y otras veces no, pero al final todo está en constante cambio, por ejemplo:

1. La Tierra gira alrededor del Sol, y éste se mueve a lo largo de la Vía Láctea, la cual se expande en el universo.
2. Tú has crecido desde que naciste, has cambiado de gustos y de pasatiempos.
3. El precio de compra/venta del peso y del dólar.

Aunque esto te pueda parecer normal, el cambio ha detonado muchos de los grandes descubrimientos de la humanidad. La curiosidad nos ha llevado a estudiar cómo cambian las cosas y por qué cambian, cómo explicar el cambio y sobre todo, cómo sacarle provecho. Si no lo crees, imagina, ¿qué harías si tuvieras una fórmula mágica que te permitiera adivinar el precio del dólar del día de mañana? Una fórmula así te permitiría volverte la persona más rica del mundo, ¿sorprendente, no?

En esta unidad aprenderás cuál es el papel de la matemática y el cambio, vas a conocer cómo representar el cambio visualmente y a caracterizar algunos tipos particulares de cambio.

¿Cómo interpreto gráficamente el crecimiento lineal?

Antes de iniciar, es bueno especificar con qué vamos a trabajar. Los ejemplos anteriores los podemos dividir en:

1. Cambios cuantitativos.
2. Cambios cualitativos.

Los **cambios cuantitativos** son aquellos que podemos cuantificar, es decir, los podemos describir usando números y relaciones matemáticas. Los **cambios cualitativos** son aquellos que no se pueden describir con números, por ejemplo, los cambios en tu forma de pensar a lo largo de tu vida. De ahora en adelante sólo nos vamos a enfocar en los cambios cuantitativos.

En tu curso de Cálculo diferencial estudiaste los conceptos de función, gráficas y funciones crecientes y decrecientes, revisa esos temas, ya que te serán útiles en este curso.

Analicemos un ejemplo. El señor José vende revistas y periódicos todos los días, el periódico más popular *Fake News* tiene un precio de $15 y la revista *Memes México* cuesta $23. A don José le interesa conocer cuánto dinero recibirá por vender cada periódico y cada revista, así que decidió hacer una tabla para apoyarse con los precios para el caso de los periódicos:

Periódicos vendidos	Total de dinero
1	$15
5	$75
25	$375
50	$750

La función es: ______________________

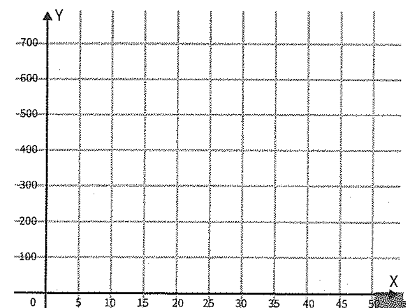


Figura 1.2

¿La relación descrita por la tabla anterior te recuerda a alguna función en particular? Ayuda a don José y escribe qué expresión algebraica determina cuánto dinero debe recibir por cada periódico vendido y dibuja la gráfica en el plano cartesiano previo.

La función anterior es un ejemplo de una función lineal creciente. Las funciones lineales crecientes tienen por características:

1. Son de la forma $y = mx + b$, donde m y b son dos números constantes, con m positivo.
2. La gráfica de éstas siempre es una línea recta y describe una función creciente.

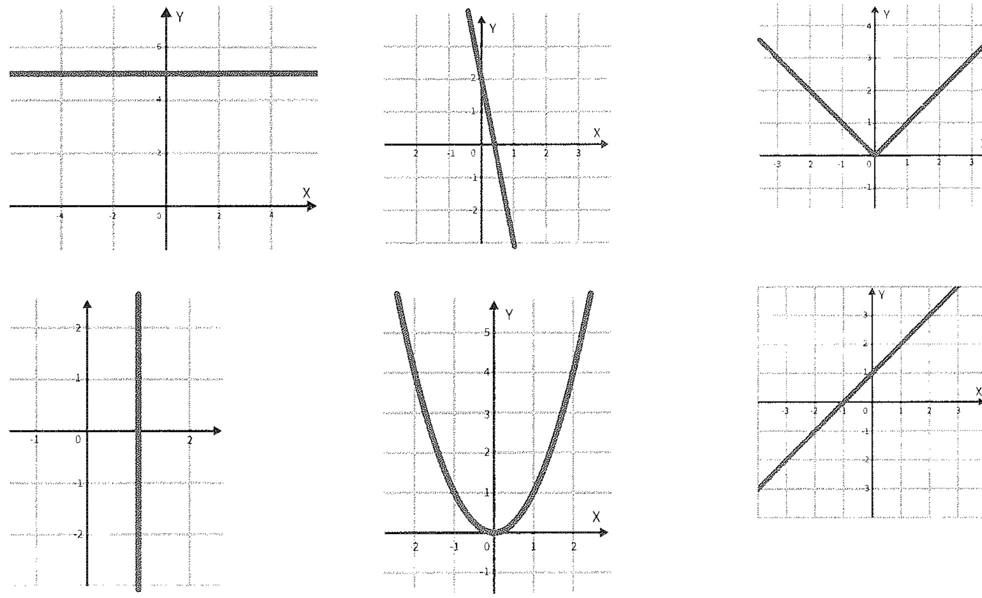
¿Crees que en el caso de las revistas también será una función lineal creciente? Para corroborar tu respuesta, elabora en tu cuaderno una tabla y una gráfica para las revistas.

Actividad de aprendizaje 1

Realiza lo que se pide.

1. Describe en el espacio cómo sería una función lineal decreciente.

2. De estas imágenes, encierra las funciones lineales crecientes y tacha las funciones lineales decrecientes.



3. En tu cuaderno, escribe la expresión algebraica que corresponda con cada una de las gráficas anteriores.

4. Analiza las situaciones, escribe en tu cuaderno la función que describe cada una y bosqueja su gráfica.

   Don José ahora también vende la revista *Mexicolandia*, a un precio de \$35, pero por promoción introductoria, cada revista cuesta cinco pesos menos. Ayúdalo a describir el dinero que recibe al vender las revistas.

   Sofía maneja un autobús escolar a una velocidad constante de 45 km/h. Ayúdala a describir cuánta distancia recorre en función del tiempo.

   Luis tiene ahorrados \$155 pesos y empezó a trabajar ayudando a don José, ganando \$45, por cada día que le ayuda. Explica cuánto dinero tendrá Luis después de 30 días de trabajo.

5. Busca en tu libro de *Cálculo diferencial* o en cualquier otra fuente, las definiciones y propiedades de la derivada, funciones crecientes y decrecientes, y los criterios de la primera y segunda derivada. Elabora en tu cuaderno un mapa mental con la información que encuentres.

¿Qué caracteriza al crecimiento no lineal?

Como te habrás dado cuenta en la sección anterior, el crecimiento lineal es muy fácil de entender y de caracterizar, el gran problema del crecimiento lineal es que casi nunca va a resolver alguna situación del mundo. Por ejemplo: dejamos caer una pelota desde un edificio de 75 metros de altura, ¿qué distancia habrá recorrido la pelota a los dos y tres segundos?

De tus cursos de Física recordaras que la distancia recorrida por un objeto en caída libre está determinada por la fórmula $d=\frac{1}{2}gt^2$, donde g es la constante de gravedad y t es el tiempo en segundos. Para fines prácticos, en este libro consideraremos que la constante de gravedad es 9.8 m/s^2, por lo tanto, tenemos que la distancia recorrida a los dos y tres segundos es 19.6 metros y 44.1 metros, respectivamente.

Si tienes dudas de las fórmulas de caída libre visita la liga http://bkmrt.com/btdUnJ.

En este ejemplo tan sencillo y cotidiano, apreciamos que la velocidad no crece linealmente. Hay varias formas de ver esto:

1. La función $d=\frac{1}{2}gt^2$ no es lineal, es decir, no es de la forma $y = mx + b$. Observa que hay un exponente cuadrático.
2. La gráfica de la función $d=\frac{1}{2}gt^2$ no describe una línea recta. Corrobora esto, trazando la gráfica en tu cuaderno.

Veamos otro ejemplo. Anita trabaja en un importante laboratorio y hoy se encuentra estudiando el comportamiento de cierto gas ideal. Después de varias mediciones a lo largo del día, Anita obtuvo la gráfica:

¿Crees que el comportamiento del gas responde a un crecimiento o decrecimiento lineal? Justifica tu respuesta.

____

____

____

____

____

____

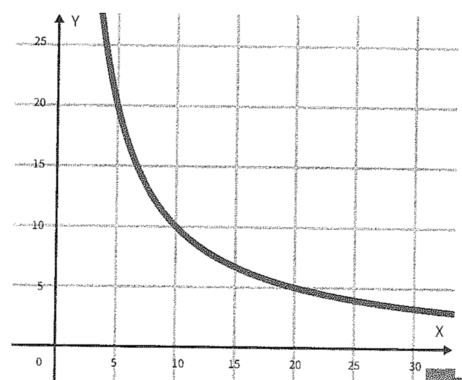


Figura 1.3

Como puedes notar, hay muchas situaciones que son importantes en la vida diaria y que no tienen un crecimiento o decrecimiento lineal, es por eso que debes aprender a distinguir de una manera sencilla cuándo algo es lineal o no. Afortunadamente, es fácil decir cuándo algo no es lineal. A continuación, se presenta una lista de características de cambios no lineales:

1. La función que describe el cambio no es lineal cuando no es de la forma $y = mx + b$, donde m y b son números reales.
2. La gráfica que describe el cambio no es una línea recta.
3. Si la función que describe el cambio es derivable, y su primera derivada no es constante.
4. La función tiene un máximo o un mínimo.

Estas propiedades pueden ser útiles para determinar de manera fácil cuándo un comportamiento matemático es lineal o no, pero ten cuidado, siempre debes analizar todos los elementos de la función para determinarlo.

Volvamos al caso de Anita, en esta ocasión recuerda que la ley de gases ideales dice que $P_1V_1 = P_2V_2$, donde P_1 y P_2 son la presión y V_1 y V_2 los volúmenes del gas, en dos momentos diferentes. El gas que estudia Anita tiene como valores iniciales $P_1 = 1$ atm y $V_1 = 100$ cm^3, por lo tanto, la función que describe el comportamiento del gas es $V_2 = \frac{100}{P_2}$, la cual claramente no es una función lineal, ya que en el denominador aparece la variable independiente P_2.

Es muy importante que siempre prestes atención a toda la información, por ejemplo, analicemos dos imágenes.

¿De las imágenes, cuál crees que es la función lineal creciente? Escribe en tu cuaderno las razones de por qué la imagen que elegiste es la función lineal y la otra no.

Imagen 1

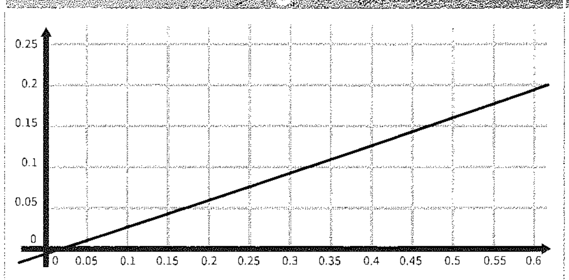
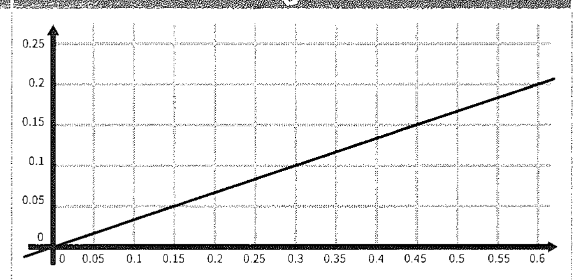


Imagen 2



Con este ejemplo, puedes observar la importancia entre "parecer una línea recta" y ser efectivamente una línea recta. Cuando trabajes, siempre debes estar seguro de todas tus respuestas y de justificar de manera correcta tus argumentos.

Actividad de aprendizaje 2

Realiza lo que se pide.

1. En las situaciones, tacha la casilla correcta. Justifica en tu cuaderno cada una de tus respuestas.

La relación de la cantidad de agua que sale de una toma a presión constante contra el tiempo.	Sí	No
La relación de tu edad y tu estatura.	Sí	No
La relación dada por la función $y = 2x^2 + x - 2$.	Sí	No

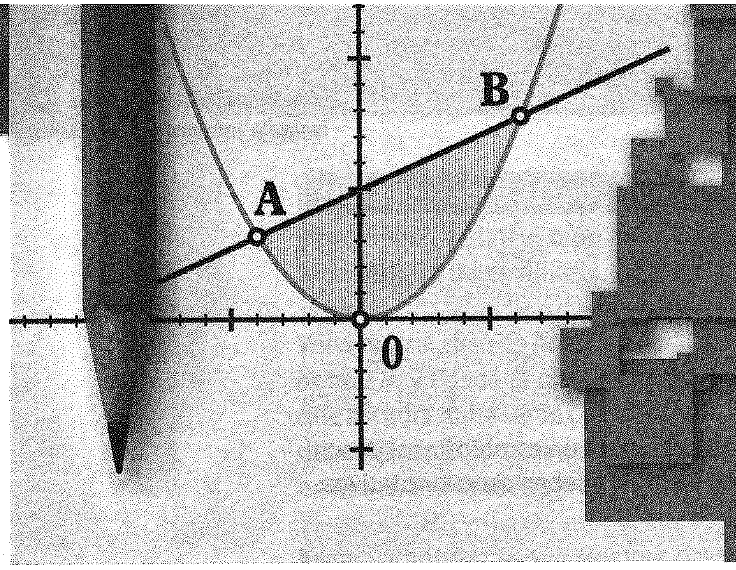
Situación	¿El cambio es lineal?	
La relación dada por la función $y = \frac{1+x}{x}$	Sí	No
La relación del precio del dólar contra el peso en el año anterior.	Sí	No

2. En el espacio escribe dos situaciones de la vida diaria donde exista un cambio lineal y escribe otras dos situaciones de cambio no lineal. Todos los ejemplos deben ser cuantitativos.

Antes del límite

A finales del siglo XVIII, y comienzos del XIX, las obras de un gran número de matemáticos ya reflejaban la necesidad objetiva de emprender la construcción de la teoría de límites como base del análisis matemático y una reconstrucción radical de este último, en la que fueron determinantes la clarificación del concepto de función, la aparición de nuevos problemas matemáticos y físicos, y la evolución de la enseñanza de la matemática que tras la Revolución francesa pasa a ser una disciplina obligatoria en la Escuela Normal Superior y en la Politécnica, pues Napoleón Bonaparte, como buen artillero, conocía y respetaba la matemática como disciplina y fue el gran impulsor de esas escuelas, las cuales aún perduran con éxito. Los matemáticos se ven obligados a enseñar análisis matemático y, por tanto, tienen que apoyarse en unas bases rigurosas.

De estos matemáticos se destacaron Augustin-Louis Cauchy y Karl Weierstrass, quienes propusieron sus definiciones de límite en 1821 y 1826, respectivamente.



Aproximación del área bajo curvas conocidas

Aproximación del área mediante rectángulos

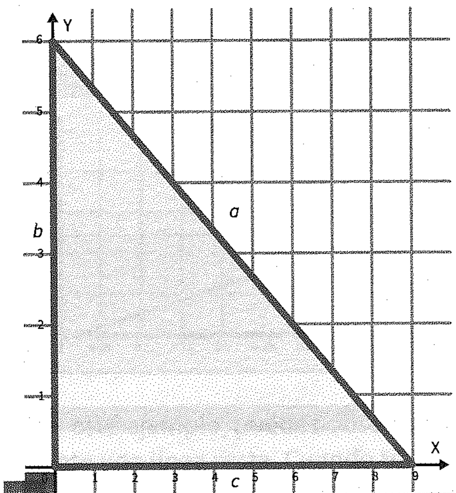


Figura 1.4

Durante tu educación básica pasaste mucho tiempo memorizando fórmulas de diferentes regiones geométricas como triángulos, rectángulos, círculos, etcétera. Estas fórmulas son muy útiles para diferentes situaciones de la vida, por ejemplo, cuando quieres pintar tu casa y necesitas conocer la superficie total que vas a pintar o si vas a comprar un terreno y el precio te lo dan en metros cuadrados, entre otros casos. En esta sección aprenderás a aproximar las áreas de diferentes regiones, para ello, primero necesitamos un concepto nuevo.

Dada una función $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, denotaremos al área bajo la **curva f de x_0 a x_1** a la región delimitada por los puntos (x_0, 0), (x_1, 0), (x_0, $f(x_0)$) y (x_1, $f(x_1)$). Si el área queda bajo el eje X, será negativa, si es al contrario, será positiva.

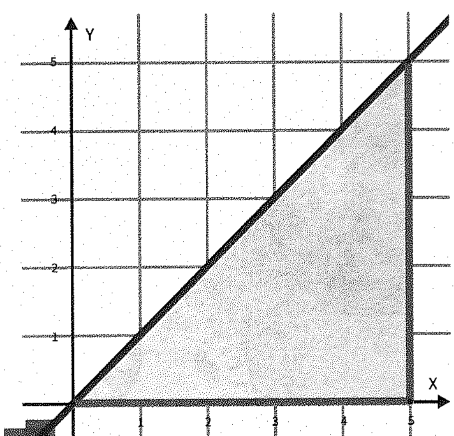


Figura 1.5

Veamos un ejemplo, considera la función dada por $f(x) = x$ y considera los puntos 0 y 5. En la imagen marcamos los puntos y la parte sombreada corresponde al área bajo la curva de 0 a 5. Observa que la región sólo comprende una parte de la gráfica y queda delimitada por los puntos y el eje X.

Con esta nueva noción, podemos preguntarnos: ¿cuál es el área bajo la curva de 0 a 5 de la función anterior dada en unidades cuadradas? En este caso es sencillo, ya que la región es claramente un triángulo rectángulo, así que el área será:

$$A=\frac{(5-0)5}{2}=12.5\ \text{u}^2,$$

ya que la base y la altura miden 5 unidades.

En general, si uno tiene una función arbitraria, determinar el área bajo la curva puede ser una tarea complicada y, en algunas situaciones, dar un valor exacto será imposible. Por ejemplo, considera la función $f(x) = x^2$, ¿cómo puedes determinar el área bajo la curva de 0 a 3?

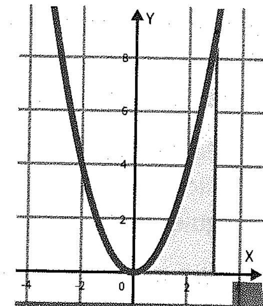


Figura 1.6

Veamos cómo resolver la pregunta anterior. Recuerda que siempre hay que iniciar con ideas sencillas, generalmente son las que mejor funcionan.

De las regiones que conoces, ¿cuál es la más sencilla de calcular? Una respuesta válida es el rectángulo, y justo es la figura que usaremos en esta sección. Observa qué pasa si consideramos el rectángulo con vértices en los puntos (0, 0), (0, 9), (0, 3) y (3, 9).

Nota que el área azul delimitada por este rectángulo es mayor al área que nos interesa. ¿Qué te parece si ahora ponemos dos rectángulos?

En la imagen se aprecia que ahora la región azul se parece más a la región que nos interesa, aún es mayor, pero ya es más próxima. Podemos colocar tantos rectángulos como queramos, esto nos da lo siguiente.

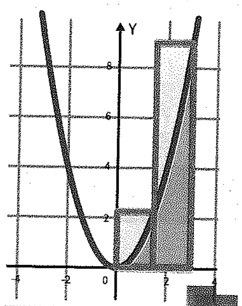


Figura 1.7

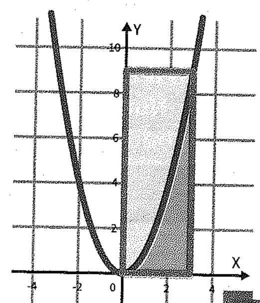


Figura 1.8

Para **aproximar con *n* subdivisiones usando rectángulos** el área bajo la curva de x_0 a x_1, donde es un número natural, haz lo siguiente:

1. Subdivide el intervalo de x_0 a x_1 en n pedazos del mismo tamaño.
2. Enumera de manera creciente los puntos que creaste con la subdivisión, por ejemplo, $x'_0, x'_1, \dots, x'_n$.
3. Calcula el área de los rectángulos que tienen de vértices los puntos $(x_m, 0)$, $(x_m, f(x_{m+1}))$, $(x_{m+1}, 0)$ y $(x_{m+1}, f(x_{m+1}))$, donde m va de 0 a $n - 1$.
4. Suma las áreas.

Veamos en nuestro caso, qué pasa al aproximar el área bajo la curva de 0 a 3 con seis subdivisiones usando rectángulos. Sigamos el procedimiento anterior paso a paso:

1. Subdividimos el intervalo, en este caso los puntos serán 0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3.
2. Enumeramos los puntos como $x'_0 = 0, x'_1 = 0.5, x'_2 = 1, x'_3 = 1.5, x'_4 = 2, x'_5 = 2.5, x'_6 = 3$.
3. En la tabla están todas las áreas de los rectángulos:

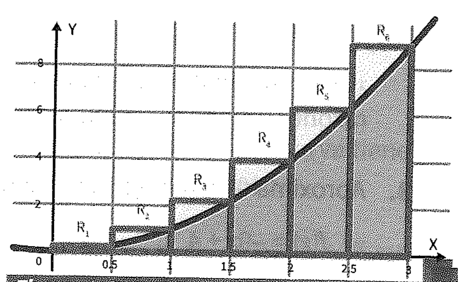


Figura 1.9

	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6
Área	0.125	0.5	1.125	2	3.125	4.5

4. La aproximación, en este caso es: 0.125 + 0.5 + 1.125 + 2 + 3.125 + 4.5 = 11.375.

Este proceso parece largo y abstracto, pero no te preocupes, más adelante aprenderás algunas fórmulas para realizarlo de una manera fácil, y veremos en algunos casos cuál es el significado detrás de todo esto. Por ahora, algunos consejos son:

- Para dibujar todo más fácil, cambia la escala de tus ejes X y Y de manera libre, observa que eso hicimos en la imagen anterior. Sólo asegúrate de que tus cálculos estén bien hechos y no te guíes nada más por el dibujo.
- Usa papel milimetrado para trazar tus dibujos de una manera más precisa.

Actividad

Realiza lo que se pide.

1. Completa el ejemplo de la sección anterior llenando la tabla. Elabora los dibujos correspondientes para los casos con 2, 4 y 8 rectángulos.

1		8
2		10
4		15

2. Tal cual su nombre lo dice, este método es sólo una aproximación, para corroborarlo calcula el área bajo la curva de la función $f(x) = 5x$, de 0 a 10, usando las fórmulas que ya conoces. Posteriormente llena la tabla.

1	10	
2	20	
5	50	

¿Qué crees que pase si cada vez tomamos más subdivisiones? Escribe en tu cuaderno tus razones y elabora el dibujo correspondiente para 2, 5 y 10 rectángulos.

3. Aproxima el área bajo la curva de las funciones usando 5, 10 y 20 subdivisiones.

a. $f(x) = -9x + 4$ | b. $f(x) = x^3$
c. $f(x) = x^2 + 2$ | d. $f(x) = x^2 + x$
e. $f(x) = 1$ | f. $f(x) = \frac{1}{x}$

Justifica todas tus respuestas en tu cuaderno y elabora al menos un dibujo de cada función.

Aproximación del área mediante trapecios

¿Aparte de la fórmula del área del rectángulo se te ocurre alguna otra fórmula sencilla? La respuesta más natural es la del triángulo, es muy sencilla de recordar: la base por la altura sobre dos, desafortunadamente usar triángulos no funciona muy bien para aproximar el área bajo la curva, pero podemos combinar rectángulos y triángulos para crear un nuevo método. Vamos a verlo en acción.

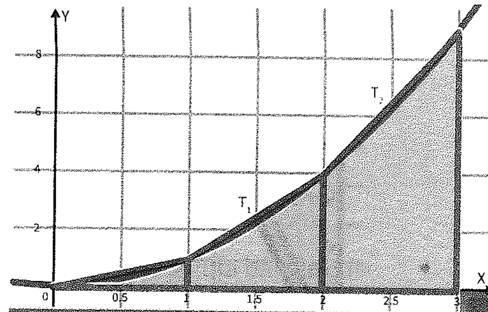


Figura 1.10

Como en la sección anterior, considera la función $f(x) = x^2$ y vamos a aproximar el área bajo la curva de 0 a 3, para ello considera la imagen de arriba. Como puedes apreciar, ahora tenemos un triángulo y dos trapecios T_1 y T_2, a los trapecios les colocamos unas líneas auxiliares para facilitar las cuentas. Ahora calculemos las áreas de los objetos que construimos:

	Triángulo	T_1	T_2
Área	0.5	2.5	6.5

Así que **usando trapecios** podemos decir que el área aproximada bajo la curva es 9.5.

Este método requiere de más cuentas, pero funciona mejor que el de rectángulos. En la imagen tenemos la aproximación del área bajo la curva usando seis trapecios. Observa que las regiones se parecen más y en este caso, el área aproximada es 9.11.

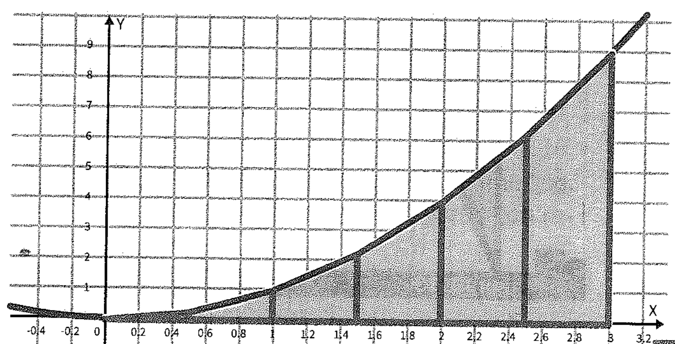


Figura 1.11

¿Cuál crees que sea el área bajo la curva? Escribe en tu cuaderno el valor que consideres correcto y tus razones, más adelante sabremos el valor correcto.

Veamos otro ejemplo un poco más complicado. En esta ocasión, la región bajo la curva tiene una parte sobre el eje X y otra parte debajo del eje X, así que debes ser más cuidadoso.

Considera la función $f(x) = x^3$ y aproximemos el área bajo la curva de –5 a 5 con cuatro subdivisiones usando trapecios. A continuación tienes la imagen de la región que nos interesa y el valor del área de cada trapecio, recuerda que la región que quede debajo del eje X debe tener signo negativo.

	Trapecio 1	Triángulo 1	Triángulo 2	Trapecio 2
Área	−175.78	−19.53	19.53	175.78

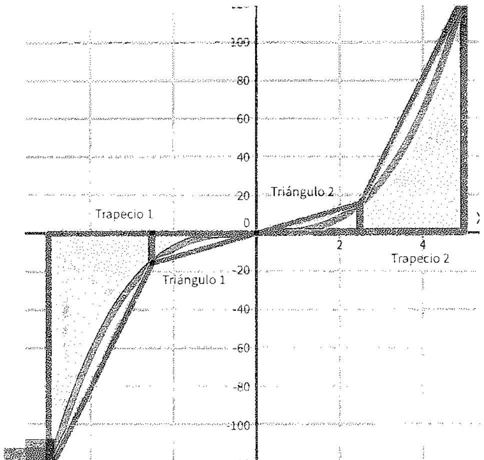


Figura 1.12

En este caso, la aproximación usando trapecios nos dice que el área bajo la curva de −5 a 5 es igual a 0. ¿Qué quiere decir esto? Sucede que el área que está debajo del eje X es exactamente igual al área que está sobre el eje X, por eso la suma da cero, como puedes observar, es muy importante tener en cuenta los signos de las regiones, recuerda: sobre el eje X es positivo, debajo del eje X es negativo.

Ahora vamos a aproximar el área bajo la curva de la misma función de −10 a 2, usando tres trapecios y dos triángulos, observa que es la primera vez en que la subdivisión del intervalo de −10 a 2 no es del mismo tamaño.

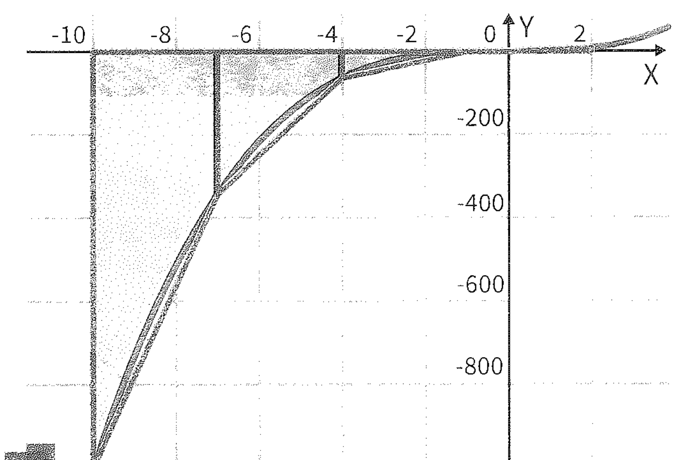


Figura 1.13

En la figura de la izquierda está la región que nos interesa y los trapecios. Observa cómo cambiamos la escala para visualizar todos los trazos.

Calculemos la aproximación, para ello, observa que en este caso tenemos tres trapecios, empezando de izquierda a derecha y dos triángulos, aunque no se aprecian del todo en la imagen por la escala que hemos usado, es importante destacar que el segundo triángulo queda sobre el eje X. En este caso sus áreas son:

	Trapecio 1	Trapecio 2	Trapecio 3	Triángulo 1	Triángulo 2
Área	−2014.5	−610.5	−97.5	−0.5	8

Valor absoluto

La función valor absoluto se denota por $|\cdot|$ y se define así:

$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, la aproximación del área bajo la curva es de −2715. El signo menos indica que la mayor parte de la región que nos interesa queda debajo del eje X, no significa que tengamos un área negativa, sólo nos dice si la mayor parte del área queda sobre o debajo del eje X.

A veces interesa el área de la región, sin importar si queda sobre o debajo del eje X, llamemos área **absoluta bajo la curva de la función $f(x)$, de x_0 a x_1,** al área bajo la curva de la función $|f(x)|$, de x_0 a x_1. Más adelante veremos ejemplos y propiedades para entender las sutilezas que hay.

Actividad de aprendizaje 4

Realiza lo siguiente.

1. En tu cuaderno, grafica las funciones $f(x)$ y las funciones $|f(x)|$, ten cuidado con los dominios de definición.

   a. $f(x) = x$
   b. $f(x) = x^3$
   c. $f(x) = x^2$
   d. $f(x) = \frac{1}{x}$
   e. $f(x) = x^2 + x$
   f. $f(x) = x + 2$

2. Siguiendo los pasos de la sección anterior, aproxima el área absoluta bajo la curva de la función $f(x) = x^3$, de -10 a 2, usando tres trapecios y dos triángulos. ¿Cuál es la diferencia con el resultado de la sección anterior? Escribe tus ideas en tu cuaderno, recuerda justificar cada una.
3. En tu cuaderno, aproxima las áreas absolutas y las áreas bajo la curva de las funciones, con 2, 5 y 10 subdivisiones, usando los trapecios y los triángulos necesarios. Recuerda hacer todas las cuentas y tener en cuenta los signos.

   a. $f(x) = -10x + 1$. De -5 a 5.
   b. $f(x) = x^2 + x$. De -7 a 1.
   c. $f(x) = x^2 - x$. De -10 a 0.
   d. $f(x) = |x|$. De -100 a 100.
   e. $f(x) = \frac{-1}{x}$. De 0.25 a 4.
   f. $f(x) = \frac{x+1}{x}$. De -4 a -0.25.
   g. $f(x) = x$. De -100 a 100.
   h. $f(x) = x^5$. De -2 a 2.
   i. $f(x) = \operatorname{sen} x$. De 0 a π.

4. En tu cuaderno, aproxima el área bajo la curva de la función $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, de 0 a 1, con 2, 5 y 10 subdivisiones, usando trapecios. ¿Qué sucede si multiplicas el número que obtuviste en cada caso por cuatro, se parece a algún número familiar? Escribe todas tus ideas.
5. En tu cuaderno, aproxima las áreas bajo la curva de las funciones $f(x) = x^2 + 10$, $g(x) = x - 8$ y $f(x) + g(x)$, de 0 a 10, con 5 y 10 subdivisiones, usando trapecios. ¿Cómo se relacionan las áreas bajo las curvas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ con relación a su suma?

Aproximación del área mediante rectángulos inscritos

En tu curso de Geometría y trigonometría viste los conceptos de polígonos inscritos y circunscritos, además, usando polígonos aprendiste a aproximar el valor de π por defecto y por exceso, es decir, por valores más pequeños y por valores más grandes. Por ejemplo, en la imagen tenemos los polígonos inscritos y circunscritos de cinco y seis lados, y las aproximaciones son:

	Cinco lados		Seis lados	
	Por defecto	Por exceso	Por defecto	Por exceso
Aproximación de π	2.93	3.63	3	3.46

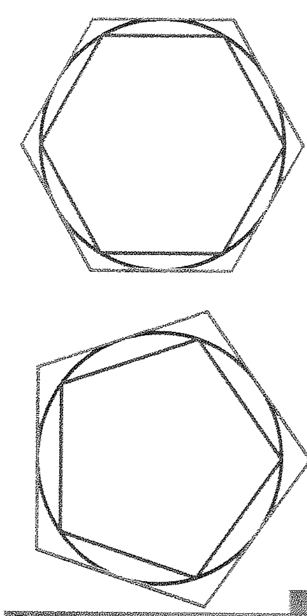


Figura 1.14

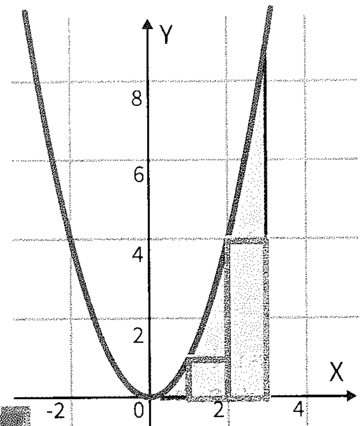


Figura 1.15

Una de las consecuencias de este método es que al aproximar por defecto y por exceso, podías calcular π de una manera más confiable. Usemos esta misma idea para aproximar el área bajo la curva, primero trabajemos con rectángulos.

Consideremos la función $f(x) = x^2$ y aproximemos el área bajo la curva, de 0 a 3, usando rectángulos inscritos. Primero subdividimos el intervalo de 0 a 3, en tres partes iguales y dibujamos los rectángulos.

En la imagen aprecia cómo ahora los rectángulos están debajo de la región, en este caso vemos que:

- Sólo hay dos rectángulos, esto es porque en el intervalo de 0 a 1 no se puede dibujar ningún rectángulo.
- La aproximación será un tanto mala, la región azul es muy pequeña, comparada con la roja.

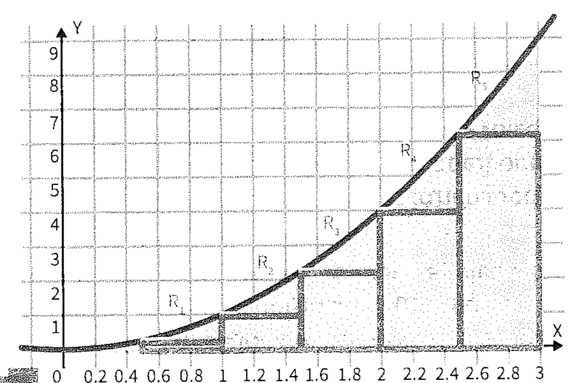


Figura 1.16

Ahora subdividimos el intervalo 0 a 3 en seis partes iguales y veamos qué sucede con la aproximación. En este caso, tenemos un total de cinco rectángulos, en la tabla están sus áreas:

	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5
Área	0.13	0.5	1.13	2	3.13

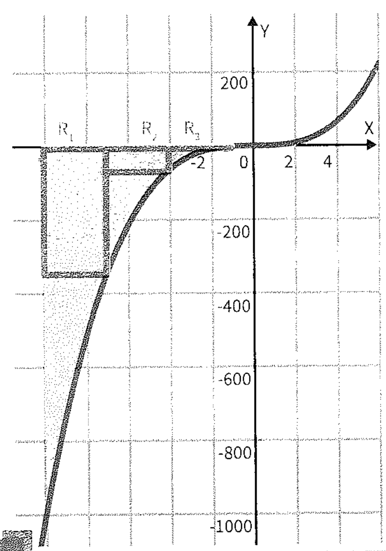


Figura 1.17

Al sumar las áreas de los rectángulos, decimos que la aproximación por defecto bajo la curva de $f(x) = x^2$, de 0 a 3, con seis subdivisiones usando rectángulos es 6.89.

Ahora aproximemos el área bajo la curva de la función $f(x) = x^3$, de −10 a 2, usando rectángulos inscritos. En la imagen ves cómo queda, usando cuatro subdivisiones y en la tabla están las áreas de los tres rectángulos que aparecen:

	R_1	R_2	R_3
Área	−1029	−192	−3

Sumando las áreas, concluimos que esta aproximación da en total −1224. Observa que usando triángulos inscritos, la aproximación es peor que usando trapecios, pero es más sencilla de calcular. En la siguiente unidad estudiarás las ventajas de cada método, por ahora es importante que refuerces lo aprendido en las últimas secciones.

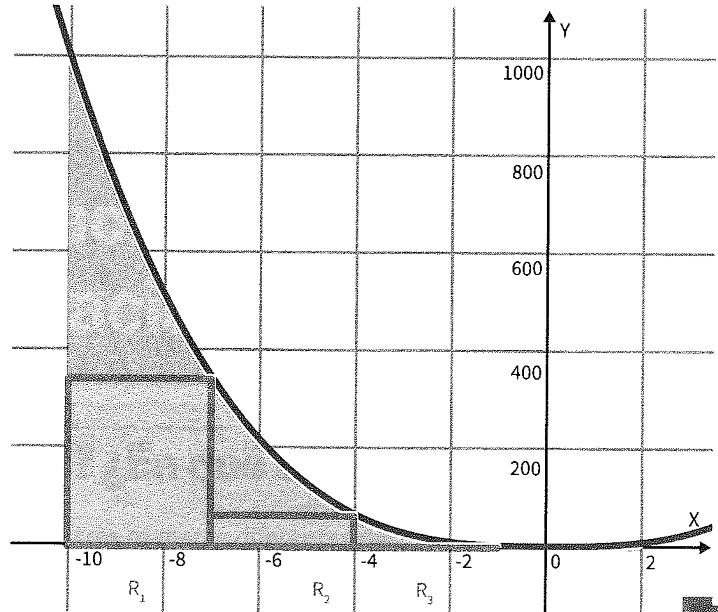


Figura 1.18

¿Qué crees que suceda si aproximamos el área absoluta bajo la curva de la función $f(x) = x^3$, de −10 a 2, usando rectángulos inscritos, cuál crees que sea el valor aproximado? Averigüémoslo, para ello usemos, igual que en el ejemplo anterior, cuatro subdivisiones.

En la imagen ves cómo quedaría la región que nos interesa determinar y los rectángulos inscritos que construimos. En este caso, las áreas de cada rectángulo son:

	R_1	R_2	R_3
Área	1029	192	3

Sumando las áreas, concluimos que la aproximación es 1224. Observa que la aproximación del área absoluta bajo la curva y del área bajo la curva sólo difiere en el signo, después verás más funciones con esta característica y algunas fórmulas para calcular las áreas más rápido. Para finalizar la lección, introducimos más vocabulario. Dada una función $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ y dos reales $x_0 < x_1$ llamaremos:

- Una partición P a una subdivisón del intervalo de x_0 a x_1.
- **Suma superior** con respecto a la partición P a la aproximación por exceso usando rectángulos.
- **Suma inferior** con respecto a la partición P a la aproximación por defecto usando rectángulos (aproximación usando rectángulos inscritos).
- **Suma trapezoidal** con respecto a la partición P a la aproximación por exceso usando trapecios.

TIC

Visita la liga para generar más ejemplos y ver cómo se realizan las aproximaciones.

bkmrt.com/C7JGKv

Actividad

Completa la tabla con la información que se solicita. Efectúa en tu cuaderno las cuentas y los dibujos necesarios.

De 0 a 5, con una partición de 10 partes.	$S_1 =$	$S_2 =$
De 0 a 10, con una partición de 10 partes.	$S_1 =$	$S_2 =$
De 0 a 20, con una partición de 20 partes.	$S_1 =$	$S_2 =$

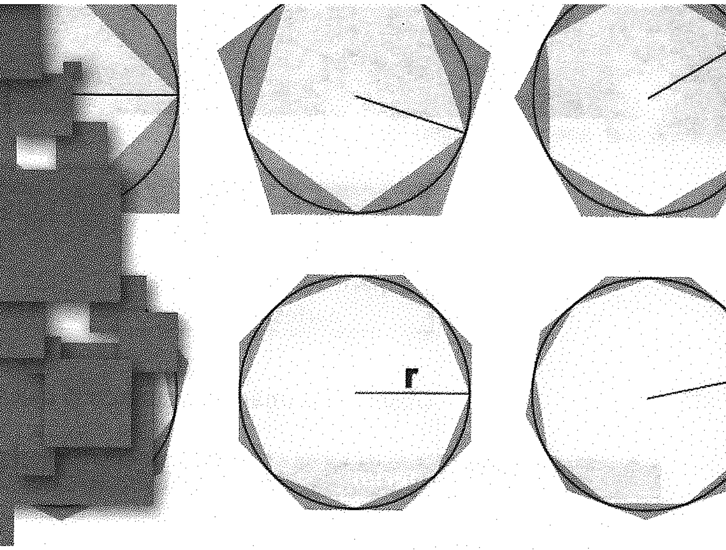
Actividad de aprendizaje 6

Productos esperados

Con mucho cuidado, completa la tabla.

De 0 a 10, con una partición de 10 partes.	$S_1 =$	$S_2 =$
De 0 a 10, con una partición de 25 partes.	$S_1 =$	$S_2 =$
De 0 a 10, con una partición de 50 partes.	$S_1 =$	$S_2 =$

Posteriormente, usando papel bond o varias hojas milimetradas, traza un dibujo del último renglón de la tabla. Aparte, escribe tus razones de qué método es mejor y cuál es más rápido. Al final, integra todo esto a tu portafolio de evidencias.



Comparación de aproximaciones

¿Alguna es mejor? ¿En qué circunstancias?

Hasta este momento, has visto tres maneras diferentes de aproximar el área bajo la curva, es posible que ya prefieras una sobre las demás, pero, ¿realmente será la mejor? En esta sección analizaremos los tres métodos con sus ventajas y desventajas.

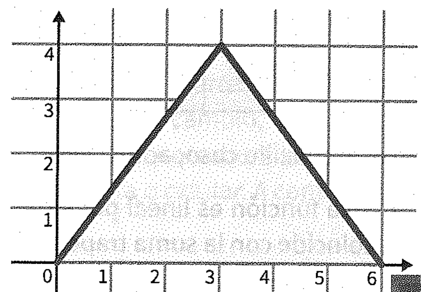


Figura 1.19

Iniciemos con un ejemplo muy sencillo, del cual conocemos su área de antemano. Trabajemos con un triángulo isósceles cuyas medidas son: 5 unidades de los lados iguales y del tercer lado 6 unidades.

En la imagen, está la figura con la cual vamos a trabajar, en este caso, la altura del triángulo es de 4 unidades, por lo tanto, su área es 12 unidades cuadradas.

Convertimos este cálculo en uno de los que hemos trabajado, para ello, primero debemos dar una función cuya gráfica sean los dos lados iguales del triángulo. ¿Se te ocurre cómo construir la función? La manera de hacerlo es por partes, si no recuerdas las funciones definidas por partes, consulta tu libro de *Cálculo diferencial*. En este caso la función que nos interesa es:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{4x}{3} & \text{si } 0\le x\le 3\\[2mm] 8-\dfrac{4x}{3} & \text{si } 3\le x\le 6\end{cases},$$

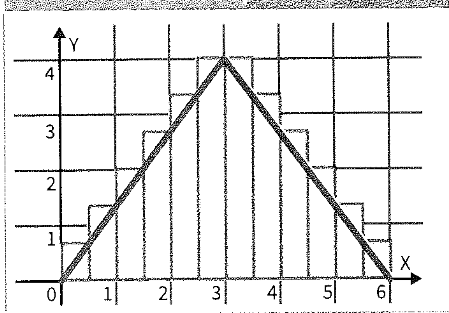
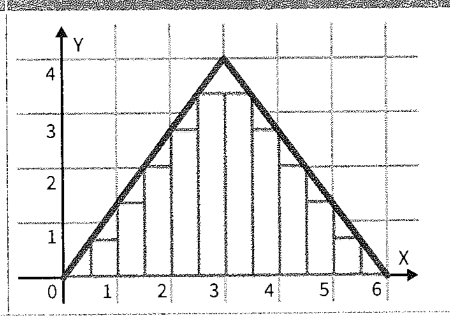
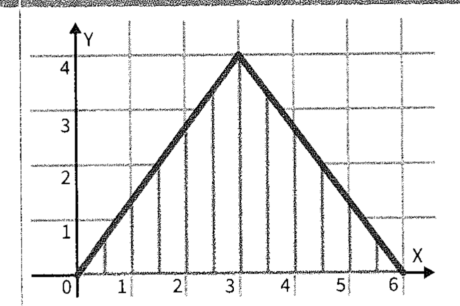
observa que la función consta de dos partes lineales.

Ahora que ya tenemos la función, calculamos las sumas inferiores, superiores y trapezoidales con una partición de 12 partes. En la tabla está toda la información.

	Suma superior	Suma inferior	Suma trapezoidal
De 0 a 6, con una partición de 12 partes.	14	10	12

	Suma superior	Suma inferior	Suma trapezoidal
De 0 a 6, con una partición de 24 partes.	13	11	12

Observa las imágenes cuando la partición consta de 12 partes.

Suma superior	Suma inferior	Suma trapezoidal
		

En este sencillo caso, aprecia algo:

- Si la función es lineal por trozos o no, su área se calcula usando las fórmulas que conoces y coincide con la suma trapezoidal.
- Cuando la función es lineal, sin importar la partición, el promedio de la suma superior e inferior es siempre el mismo, eso quiere decir que los dos métodos son igual de buenos.

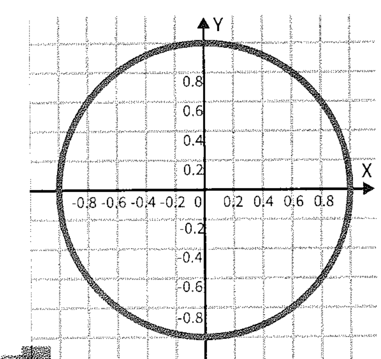


Figura 1.20

Este ejemplo nos dice también que si queremos hacernos de una mejor idea, debemos de trabajar con funciones que no sean lineales. Tomando en cuenta esto, ahora aproximemos el área de un círculo de radio uno. Por las fórmulas que conoces, este círculo tiene área π, ahora veamos que sucede con los demás métodos.

Primero necesitamos una función, desafortunadamente la circunferencia no es la gráfica de una función (¿recuerdas por qué?, ¿qué pasa si dibujas una línea vertical que pase por el origen?), pero debido a las simetrías del círculo tenemos una solución. Trabajemos sólo con la mitad superior del círculo, cuya área es $\frac{\pi}{2}$, en este caso, la función que necesitamos es:

$$f:[-1,1]\to\mathbb{R}$$
$$x \mapsto \sqrt{1-x^2}$$

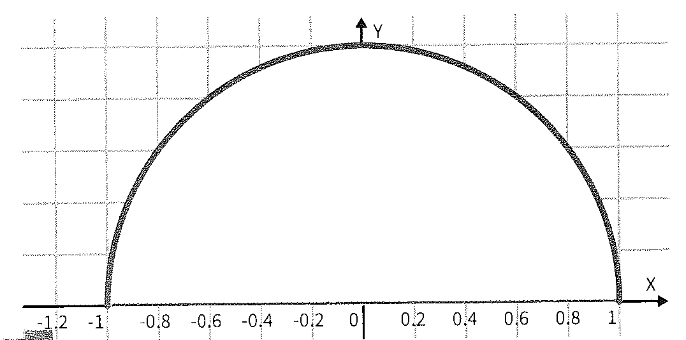


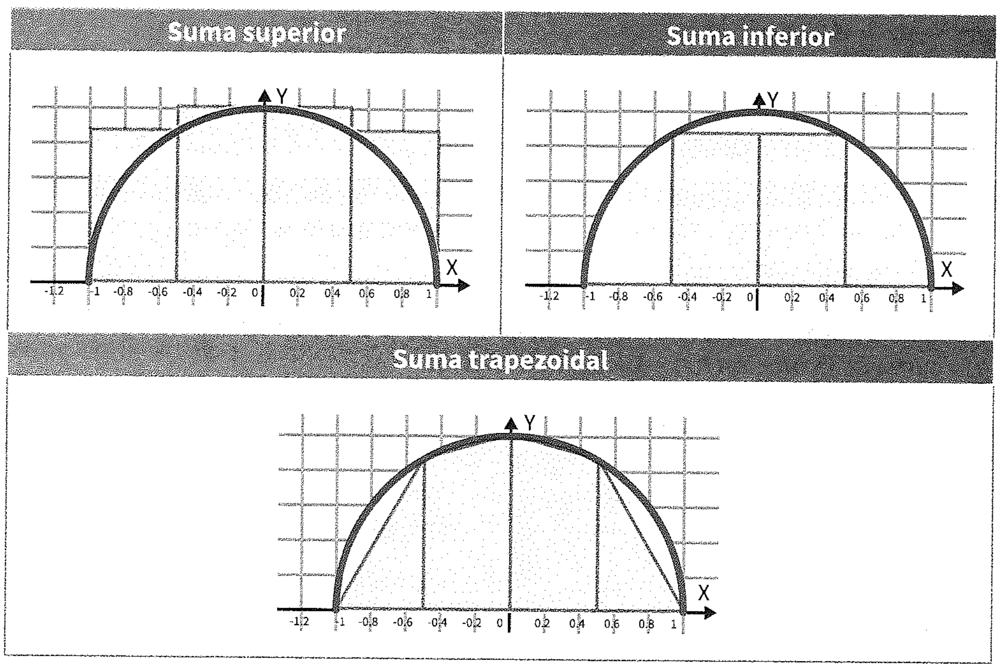
Figura 1.21

En la imagen, aprecia la mitad de la circunferencia y el área que nos interesa aproximar.

Igual que antes, aproximemos esta área bajo la curva usando sumas superiores, inferiores y trapezoidales con diferentes particiones.

	Suma superior	Suma inferior	Suma trapezoidal	Área real $\frac{\pi}{2}$
De −1 a 1, con una partición de 4 partes.	1.866	0.866	1.366	1.57
De −1 a 1, con una partición de 8 partes.	1.74	1.24	1.49	1.57
De −1 a 1, con una partición de 16 partes.	1.66	1.41	1.54	1.57
De −1 a 1, con una partición de 50 partes.	1.6	1.52	1.566	1.57
De −1 a 1, con una partición de 100 partes.	1.58	1.549	1.569	1.57

Observa que la suma trapezoidal es la mejor, con sólo una partición de 16 partes obtenemos un resultado muy parecido, aunque las cuentas son un poco más largas, en cambio, las sumas inferiores y superiores son más sencillas, pero no dan tan buen resultado. Corrobora los primeros dos cálculos en tu cuaderno y los últimos tres, usando una computadora o celular. A continuación observa las imágenes cuando la partición consta de cuatro partes.



Con los dos ejemplos podemos concluir:

- Si la función es lineal, la suma trapezoidal da como resultado el área exacta y las sumas superiores e inferiores son igual de buenas.
- Si la función no es lineal, la suma trapezoidal da un mejor resultado aunque las cuentas son más largas. En cambio, las sumas superiores e inferiores son más fáciles de calcular, pero no son tan precisas.

Llega un momento en que tomar más subdivisiones no mejora el cálculo con ninguna aproximación.

Analiza que cada método tiene su pro y su contra, al final eres libre de elegir tu favorito, pero debes dominarlos todos.

Actividad

Siguiendo los pasos de la lección anterior, compara los tres métodos para aproximar el área bajo la curva en el caso de una elipse cuyo eje menor es 4 y su eje mayor es 10, para ello completa la información que se pide.

1. La función es: ______________________________

2. Tomando sólo la parte sobre el eje X, la aproximación del área bajo la curva de la función es:

Con una partición de 2 partes.				
Con una partición de 4 partes.				
Con una partición de 8 partes.				
Con una partición de 10 partes.				
Con una partición de 50 partes.				

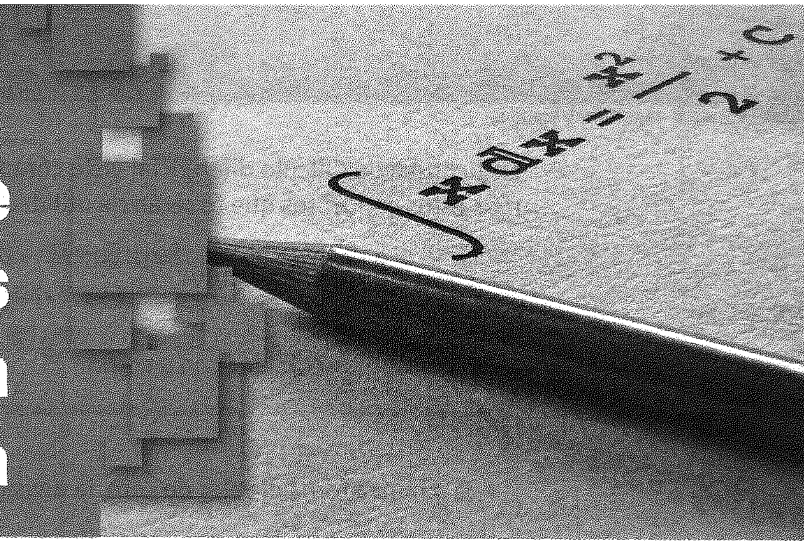
Actividad de aprendizaje 8

Productos esperados

Siguiendo los pasos de la lección anterior, compara los tres métodos para aproximar el área bajo la curva de la función $f(x) = 10\cos(x)$, de 0 a 2π.

Con una partición de 2 partes.			
Con una partición de 4 partes.			
Con una partición de 8 partes.			
Con una partición de 10 partes.			

Dibuja el primer y último renglón, usando papel bond o varias hojas milimetradas. Al final, escribe tus conclusiones de cada método, cuál es mejor, peor y por qué. Integra todo esto a tu portafolio de evidencias.



Conjeturar sobre expresiones generales del área bajo la curva

Área bajo la función

En el tema anterior viste cómo aproximar el área bajo la curva de varias funciones sencillas, a partir de ahora, los ejemplos involucrarán funciones más complicadas y es necesario que recuerdes algunas propiedades que te serán útiles más adelante.

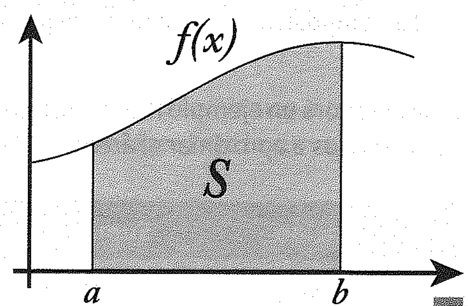


Figura 1.22

Dada una función f: $A \to B$, el conjunto A se llama dominio, el conjunto B codominio y el conjunto $f(A)$ imagen.

Considera una función f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diremos que la función es inyectiva si no existen dos números distintos a los cuales se les asignen el mismo número, es decir, si $x \neq y$, entonces $f(x) \neq f(y)$.

Como nuestras funciones tienen por dominio y contradomio los números reales, podemos usar sus propiedades para explicar el comportamiento de una función. Sea una función f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diremos que:

- La función f es monótona creciente en el intervalo (a, b), si siempre que escojamos dos valores dentro del intervalo x, y, con $x < y$, tenemos que $f(x) < f(y)$.
- La función f es monótona decreciente en el intervalo (a, b), si siempre que escojamos dos valores dentro del intervalo x, y, con $x < y$, tenemos que $f(x) > f(y)$.
- La función f es constante en el intervalo (a, b), si siempre que escojamos dos valores dentro del intervalo x, y, tenemos que $f(x) = f(y)$.
- La función f es par si $f(-x) = f(x)$ para cualquier valor de x.
- La función f es impar si $f(-x) = -f(x)$ para cualquier valor de x.

Por ejemplo:

- Las funciones lineales crecientes son ejemplos de funciones monótonas crecientes.
- La función $f(x) = x^2$ es una función par y la función $f(x) = x^3$ es una función impar.

En tu curso de Cálculo diferencial viste cómo sumar, multiplicar y componer funciones, recordemos estos conceptos que te serán de utilidad. Sean f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y g: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dos funciones, definimos:

- La suma de f con g como $\begin{aligned} f+g:\mathbb{R}&\to\mathbb{R} \\ x&\mapsto f(x)+g(x)\end{aligned}$
- La multiplicación de f con g como $\begin{aligned} f\cdot g:\mathbb{R}&\to\mathbb{R} \\ x&\mapsto f(x)\cdot g(x)\end{aligned}$
- Si g nunca toma el valor de cero, la división de f con g se define como $\begin{aligned} \frac{f}{g}:\mathbb{R}&\to\mathbb{R} \\ x&\mapsto \frac{f(x)}{g(x)}\end{aligned}$

Además de estas operaciones hay una nueva operación:

- La composición de f seguida de g como $\begin{aligned} f\circ g:\mathbb{R}&\to\mathbb{R} \\ x&\mapsto f(g(x))\end{aligned}$

Veamos ahora un ejemplo más complicado. Considera las funciones $f(x)=\text{sen}(x)$, $g(x)=x$ y $h(x)=f(x)+g(x)$, vamos a aproximar el área bajo la curva, de 0 a $\frac{\pi}{2}$, con una partición de seis subdivisiones.

Función	Sumas superiores	Sumas inferiores	Sumas trapezoidales
$f(x)=\text{sen}(x)$	1.125	0.863	0.994
$g(x)=x$	1.439	1.028	1.233
$h(x)=\text{sen}(x)+x$	2.564	1.891	2.227

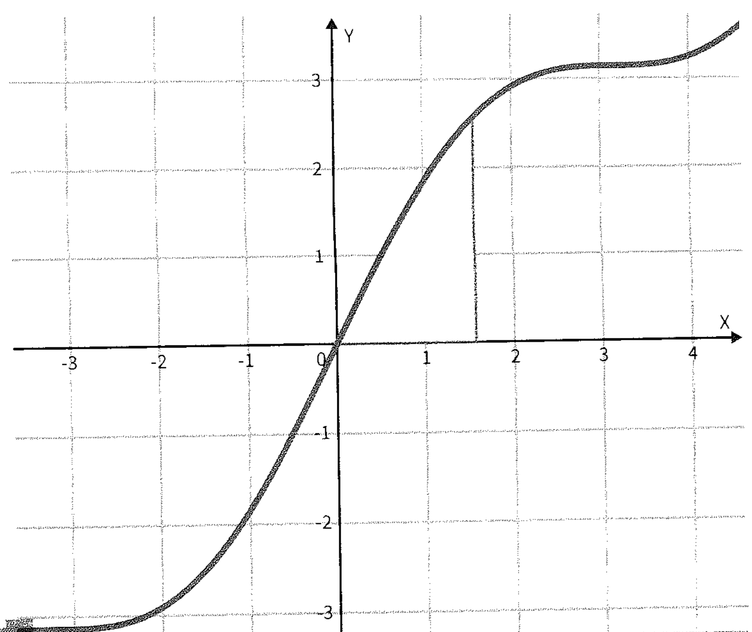


Figura 1.23

En la imagen, observa la función $h(x)$ y la región que nos interesa. Aprecia que usando funciones y sus operaciones podemos crear ejemplos más complicados, más adelante usaremos este tipo de funciones para tratar problemas de la vida diaria.

Analiza detenidamente la tabla, ¿crees que haya una relación entre los primeros dos renglones y el tercero? Más adelante veremos una descripción completa de este fenómeno.

Área bajo la función constante

¿Cuál crees que sería la función más sencilla de estudiar? Con certeza, la respuesta es la función constante, veamos algunas propiedades que caracterizan a esta función:

- Su gráfica es una línea recta. Esto es claro, recuerda que una función constante es de la forma $f(x) = c$, con c un número constante, por lo tanto, todos los puntos de la gráfica de la función son de la forma (x, c), es decir, la segunda coordenada es constante, por lo tanto, su gráfica es una línea horizontal que corta al eje Y en el punto $(0, c)$.

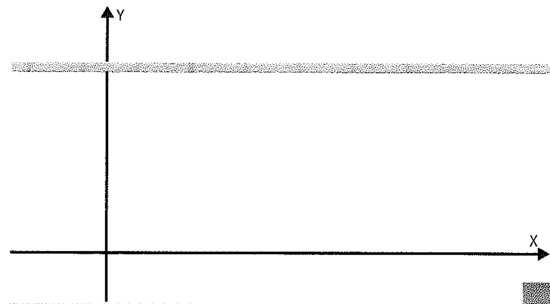


Figura 1.24

- Su derivada siempre es 0. De tu curso de Cálculo diferencial debes recordar que si la función se define como $f(x) = c$, entonces su derivada $f'(x) = 0$.

Determinar el área bajo la curva de una función constante es muy sencillo. Vamos a plantear el problema en abstracto, definamos a la función $f(x) = c$ y calculemos el área bajo la curva, de x_0 a x_1, donde x_0 y x_1 son dos números reales cualesquiera con $x_0 < x_1$.

En la imagen, dibujamos de manera general cómo es la región que nos interesa calcular. Es claro que es un rectángulo, ¿cuánto mide la base y cuánto mide la altura? Vamos a determinarlo.

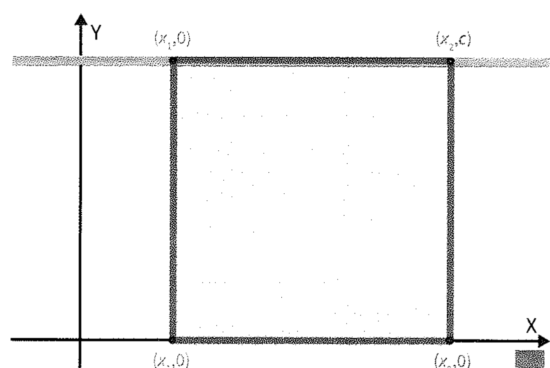


Figura 1.25

La base es el intervalo delimitado por x_0 y x_1, así que la base debe medir $b = x_1 - x_0$.

La altura la puedes determinar por la segunda coordenada de los vértices superiores del rectángulo, en este caso, la altura es $h = c$. Por lo tanto, el área bajo la curva de la función $f(x) = c$, de x_0 a x_1, es:

$$a = bh = (x_1 - x_0)c.$$

Si lo que nos interesa es el área absoluta bajo la curva, en este caso la base seguirá siendo la misma, pero la altura será $|c|$, por lo tanto, la fórmula quedaría:

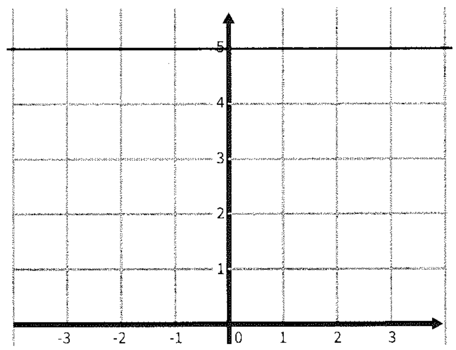
$$a_{abs} = bh = (x_1 - x_0)|c|.$$

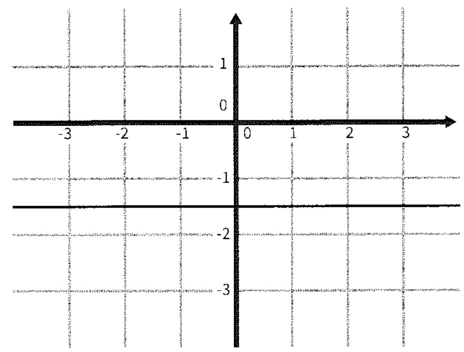
En este caso, no fue necesario usar aproximaciones con particiones y sumas inferiores, superiores o trapezoidales, ya que la función constante es muy sencilla de manipular. En la siguiente sección veremos un caso más complicado.

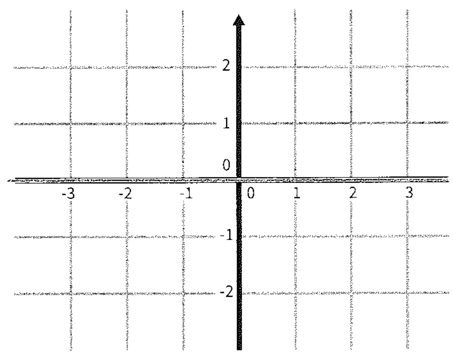
Actividad

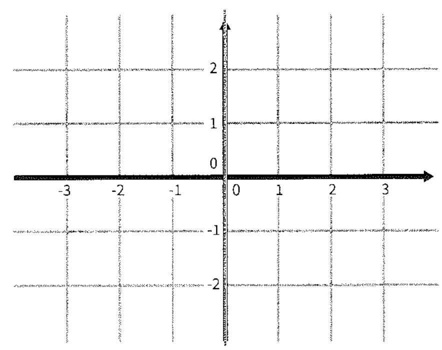
Realiza lo que se pide.

1. Las funciones constantes son muy sencillas y sus gráficas son fáciles de leer. En cada caso, escribe la función o relación a la que corresponde cada gráfica o región.









2. Una de las gráficas anteriores no era una función constante, ¿cúal y por qué?

3. En tu cuaderno responde los ejercicios.

   Calcula el área bajo la curva de la función $f(x) = -0.3$, de -10 a 8.

   Calcula el área absoluta bajo la curva de la función $f(x) = -0.3$, de 10 a 80.

   Calcula el área bajo la curva de la función $f(x) = \pi$, de $-\pi$ a 5π.

   Calcula el área absoluta bajo la curva de la función $f(x) = -\pi$, de -10π a -5π.

   Calcula el área bajo la curva de la función $f(x) = 0$, de -100000 a 100000.

Área bajo la función lineal

En nivel de complejidad, la segunda función más sencilla sería la función lineal, recuerda que una función lineal es de la forma:

$$f(x) = mx + b,$$

donde m y b son dos números reales, con m no cero.

Recuerda que tal y como su nombre lo indica, la gráfica de una función lineal es una línea recta. A continuación tienes una imagen general de cómo es la gráfica de una función lineal y una lista de propiedades:

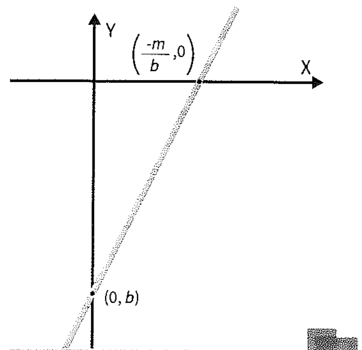


Figura 1.26

- La gráfica corta en el eje X en el punto $\left(-\frac{b}{m},0\right)$ y en el eje Y en el punto $(0, b)$ y la gráfica queda completamente determinada por esos dos puntos.
- La derivada de $f(x)$ es $f'(x) = m$. Esto quiere decir que la función crece de manera uniforme, ¿te recuerda a lo que viste de movimiento con velocidad constante?
- Si m es positivo, la función es monótona creciente, en caso contrario es monótona decreciente.

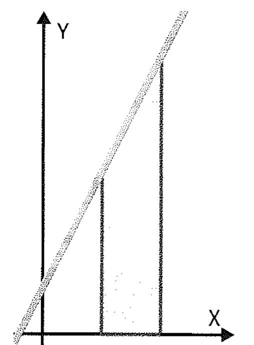


Figura 1.27

Determinar el área bajo la curva de una función lineal es sencillo. Vamos a plantear el problema en abstracto, definamos a la función $f(x) = mx + b$ y calculemos el área bajo la curva, de x_0 a x_1, donde x_0 y x_1 son dos números reales cualesquiera, con $x_0 < x_1$. Consideremos en particular que m, b, x_0 y x_1 son todos números positivos, otros casos podrás adaptarlos fácilmente.

En la imagen, tienes la gráfica de manera general y colocamos algunas líneas auxiliares. Observa que la región que nos interesa se compone de dos piezas: un rectángulo R_1 y un triángulo T_1.

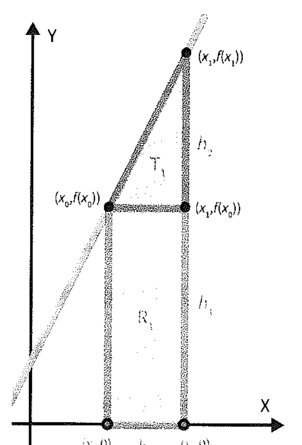


Figura 1.28

Para determinar las áreas del rectángulo y del triángulo debemos determinar las alturas y las bases. Ve que ambas piezas tienen la misma base $b = x_1 - x_0$. Por otra parte, las alturas son:

$$h_1 = f(x_0) \text{ y } h_2 = f(x_1) - f(x_0).$$

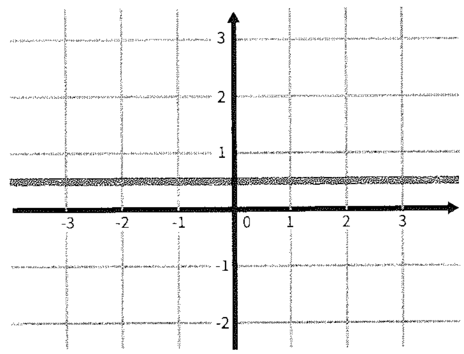
De esta manera, el área que nos interesa calcular es:

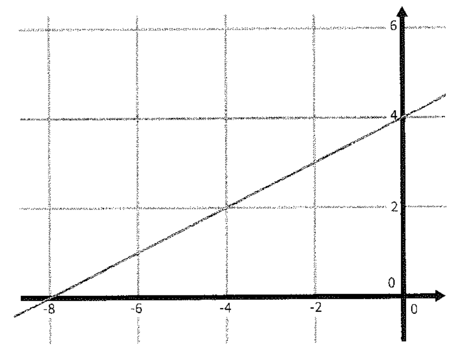
$$\sigma = \text{Área}(R_1) + \text{Área}(T_1) = (x_1 - x_0)f(x_0) + \frac{(x_1 - x_0)(f(x_1) - f(x_0))}{2}.$$

Actividad

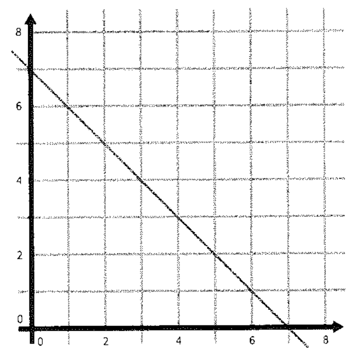
Realiza lo que se pide.

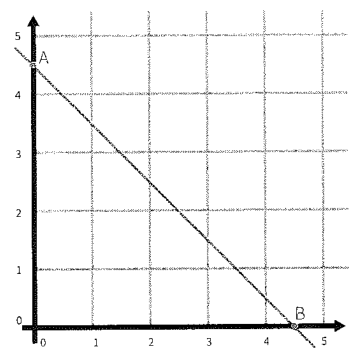
1. Las funciones lineales son sencillas y sus gráficas se entienden viendo sólo dos puntos. Escribe la función a la que corresponde cada gráfica.





______________________ ______________________





______________________ ______________________

2. Una de las gráficas anteriores no era una función lineal, ¿cuál y por qué?

____

____

____

3. En tu cuaderno responde los ejercicios.
   - Calcula el área bajo la curva de la función $f(x) = 8x - 4$, de -10 a 8.
   - Calcula el área absoluta bajo la curva de la función $f(x) = x - 0.3$, de 10 a 80.
   - Calcula el área bajo la curva de la función $f(x) = 0.1x + \pi$, de $-\pi$ a 5π.
   - Calcula el área absoluta bajo la curva de la función $f(x) = 9\pi x - 7$, de -10π a -5π.
   - Calcula el área absoluta bajo la curva de la función $f(x) = x$, de -100 a 100.

Área bajo la función cuadrática

Veamos ahora un caso más complicado que las funciones lineales y cuadráticas. Considera la función $f(x) = x^2$. Calculemos el área bajo la curva de 0 a x_1, donde x_1 es un número real positivo.

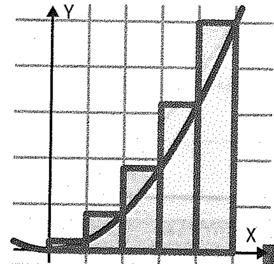


Figura 1.29

En este caso, usemos las sumas superiores. A continuación tienes un dibujo general del problema y en la tabla puedes observar qué pasa con las sumas, tomando diferentes particiones.

Partición	Base de los rectángulos	Suma superior
5	$\frac{x_1}{5}$	$\frac{x_1}{5}\left(\left(\frac{x_1}{5}\right)^2+\left(\frac{2x_1}{5}\right)^2+\ldots+\left(\frac{5x_1}{5}\right)^2\right)=\left(1^2+2^2+\ldots+5^2\right)\frac{x_1^{\;3}}{5^3}=55\frac{x_1^{\;3}}{5^3}$
20	$\frac{x_1}{20}$	$\frac{x_1}{20}\left(\left(\frac{x_1}{20}\right)^2+\ldots+\left(\frac{20x_1}{20}\right)^2\right)=\frac{x_1^{\;3}}{20^3}\left(1^2+\ldots+20^2\right)=2870\frac{x_1^{\;3}}{20^3}$
n	$\frac{x_1}{n}$	$\left(\frac{(n+1)(n+0.5)}{n^2}\right)\frac{x_1^{\;3}}{3}$

Corrobora las cuentas, sigue todos los pasos y los dibujos necesarios del primer caso para que lo comprendas.

Usando la última fórmula, podemos aproximar el área de 0 a 1.

Partición	Base de los rectángulos	Suma superior	Partición	Base de los rectángulos	Suma superior
5	0.2	0.44	100	0.01	0.33835
10	0.1	0.385	1000	0.001	0.3338335
50	0.02	0.3434	10000	0.0001	0.333383335

Si tuviéramos que redondear nuestra aproximación, podemos decir sin dudas, que el área bajo la curva de la función $f(x)$, de 0 a 1, es 1/3. Más adelante veremos las fórmulas precisas que nos permitan corroborar esta afirmación.

Ahora veremos un ejemplo en el que el intervalo no sea de la forma $(0, x)$, donde x es mayor que cero.

Consideremos la función $f(x) = 0.25x^2$. Calculemos el área bajo la curva en el intervalo $(-2, 4)$. Como primera observación, hay que destacar que la función es simétrica respecto al eje Y, por lo que el área de la derecha del 0 es igual al de la izquierda. Esto nos ayudará al calcular en este caso el valor del área.

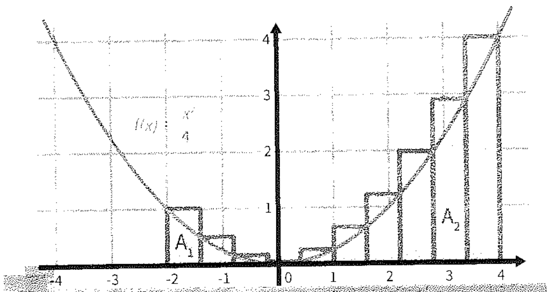


Figura 1.30

En este caso lo que haremos es seccionar el área en dos partes principales, A_1 y A_2.

A_1 correspondería al intervalo (−2, 0) y A_2 al intervalo (0, 4). Lo que hay que notar es que el área bajo la curva, de −2 a 0, es igual al de 0 a 2, por lo que calcularemos entonces el área bajo la curva de 0 a 2.

Usando la fórmula del ejemplo anterior, aproximaremos el área A_1, en el intervalo (0, 2).

Partición	Base de los rectángulos	Suma superior	Partición	Base de los rectángulos	Suma superior
5	0.4	0.88	100	0.02	0.6767
10	0.2	0.77	1000	0.002	0.667667
50	0.04	0.6868	10000	0.0002	0.66676667

Ahora, aproximaremos el área de A_2, en el intervalo (0, 4).

Partición	Base de los rectángulos	Suma superior	Partición	Base de los rectángulos	Suma superior
5	0.8	7.04	100	0.04	5.4136
10	0.4	6.16	1000	0.004	5.341336
50	0.08	5.4944	10000	0.0004	5.33413336

Por lo que la suma de las aproximaciones de la curva bajo las mismas condiciones de A_1 y A_2 se acerca a 6, que es el valor exacto del área bajo la función $0.25x^2$, en el intervalo (−2, 4).

Actividad

Realiza lo que se te pide.

1. Dada la función $f(x) = -7x^2$, aproxima el área bajo la curva, de −8 a 8, llenando la tabla.

8		
16		
32		
64		

Elabora en tu cuaderno los dibujos de los primeros dos renglones y escribe todas las operaciones que realices.

2. En esta sección te dimos una fórmula para aproximar el área bajo la curva, usando sumas superiores, ahora determinarás la fórmula para áreas inferiores. Considera la función $f(x) = x^2$ y un número positivo x_1.

   a. Determina cuántos rectángulos hay si la partición es de pedazos uniformes. Recuerda que estás usando sumas inferiores.

   b. Determina la base de los rectángulos.

   c. Con la fórmula $1^2+2^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ determina cuál es la suma inferior.

   d. Compara tu resultado con el de tus compañeros y con el de las sumas superiores. ¿Qué puedes concluir de ambos métodos?

3. En tu cuaderno responde los ejercicios.

   a. Calcula el área bajo la curva de la función $f(x) = (-x)^2$, de 2 a 8.

   b. Calcula el área absoluta bajo la curva de la función $f(x) = 0.85x^2$, de -10 a 0.

   c. Calcula el área bajo la curva de la función $f(x) = x^2$, de $-\pi$ a π.

   d. Calcula el área absoluta bajo la curva de la función $f(x) = -x^2$, de 10 a 100.

Área bajo una curva del tipo $y = x^n$

Al parecer, calcular el área bajo la curva de una función constante o de una lineal es muy sencillo, desafortunadamente, en la mayoría de los casos esto no es así, casi ninguna función tiene una fórmula exacta para calcular su área bajo la curva, por ejemplo, la función:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},$$

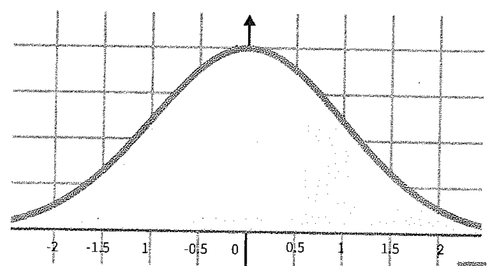


Figura 1.31

se denomina **función Gaussiana** y es muy importante en probabilidad y estadística. ¿Cuál crees que es su área bajo la curva de -10 a 10? Te podría sorprender, pero redondeando el área bajo la curva es 1. Esta función requiere trucos elaborados para determinar su área bajo la curva, pero no te preocupes, no se abordarán en este libro.

Para el caso de funciones de la forma $f(x) = x^2$ logramos dar una fórmula para aproximar el área bajo la curva, usando sumas superiores. En el caso de funciones generales de la forma $f(x) = x^n$, con n un natural mayor que dos, es posible dar una fórmula para la aproximación, pero su cálculo es más complicado, incluso cuando n es mayor que 10, la expresión ya es complicada.

En la siguiente tabla tabla tienes las expresiones para aproximar el área bajo la curva de la función $f(x)$, de 0 a x_1, con n menor o igual que 7. Más adelante verás las fórmulas para calcular de manera exacta el área bajo la curva de la función $f(x)$.

Valor de n	Tamaño de la partición	Expresión
3	$\frac{x_1}{m}$	$\frac{x_1^{\,4}}{m^4}\left(\frac{m^2(m+1)^2}{4}\right)$
4	$\frac{x_1}{m}$	$\frac{x_1^{\,5}}{m^5}\left(\frac{m(m+1)(2m+1)(3m^2+3m-1)}{30}\right)$
5	$\frac{x_1}{m}$	$\frac{x_1^{\,6}}{m^6}\left(\frac{m^2(m+1)^2(2m^2+2m-1)}{12}\right)$
6	$\frac{x_1}{m}$	$\frac{x_1^{\,7}}{m^7}\left(\frac{m(m+1)(2m+1)(3m^4+6m^3-3m+1)}{42}\right)$
7	$\frac{x_1}{m}$	$\frac{x_1^{\,8}}{m^8}\left(\frac{m^2(m+1)^2(3m^4+6m^3-m^2-4m+2)}{24}\right)$

En la tabla, m representa el número de divisiones que tendrá la partición en cada caso.

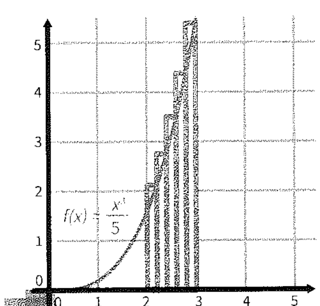


Figura 1.12

Usando esta tabla, tenemos que si $n = 3$, entonces, podemos aproximar el área bajo la curva de $f(x)$, de 0 a 1, al valor de $\frac{1}{4}$.

Ahora consideremos la función $f(x) = (0.2)x^3$. Calculemos el área bajo la curva en el intervalo (2, 3). En este caso, calcularemos las áreas bajo la curva en los intervalos (0, 2) y (0, 3) y luego haremos la diferencia de la segunda área menos la primera.

Usando la fórmula para el caso cuando $n = 3$, aproximaremos las áreas bajo la curva en los intervalos (0, 2) y (0, 3).

(0, 2)					
Partición	Base de los rectángulos	Suma superior	Partición	Base de los rectángulos	Suma superior
5	0.4	1.152	100	0.02	0.81608
10	0.2	0.968	1000	0.002	0.8016008
50	0.02	0.83232	10000	0.0002	0.80016008
(0, 3)					
5	0.6	5.832	100	0.03	4.131405
10	0.3	4.9005	1000	0.003	4.05810405

(0, 3)					
Partición	Base de los rectángulos	Suma superior	Partición	Base de los rectángulos	Suma superior
50	0.06	4.21362	10000	0.0003	4.0508100405

Por lo que la diferencia de las aproximaciones de la curva bajo las mismas condiciones de ambas áreas se acerca a 3.25, que es el valor exacto del área bajo la función $(0.2)x^3$, en el intervalo (2, 3).

Actividad de aprendizaje 12

Usando la tabla de esta sección, completa la tabla. Escribe en tu cuaderno todas las cuentas necesarias.

Función	De	Partición	Suma superior
$f(x) = -7x^3$	0 a 5	8	
$f(x) = x^4$	−10 a 0	16	
$f(x) = 6(-x)^5$	0 a 3	32	
$f(x) = -x^6$	−2 a 2	64	
$f(x) = x^9$	2 a 4	128	

En tu cuaderno, elabora al menos dos dibujos de la región que te interesa calcular y de las sumas superiores.

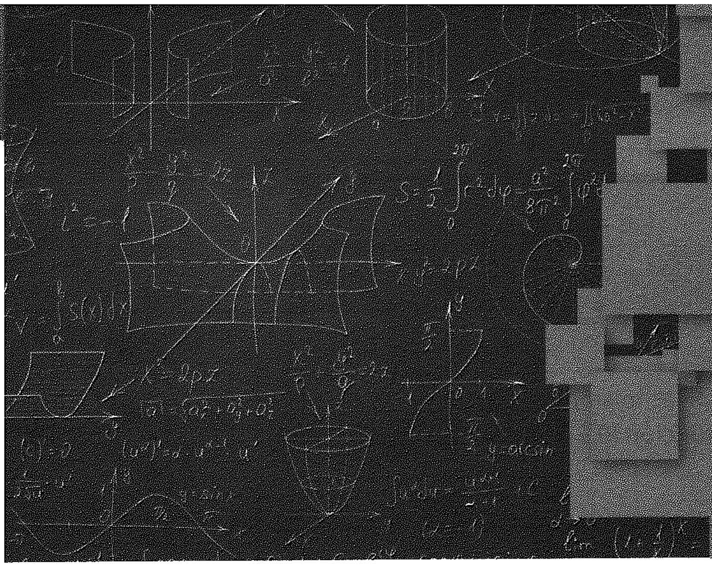
Actividad de aprendizaje 13

Productos esperados

En la tabla de esta sección te dimos fórmulas para aproximar el área de algunas funciones, en esta actividad aproximarás una fórmula general. Analiza cada una de las preguntas:

1. ¿Cuál es la parte similar de cada una de las fórmulas? ¿Notas alguna relación entre esa parte y el exponente n de la función?
2. En las fórmulas aparecen fracciones cada vez más complicadas. ¿Notas algún patrón de esas fracciones? Toma algunos valores de m y de n y ve cómo se pueden redondear.
3. Juntando los dos puntos anteriores, ¿se te ocurre cómo podría ser una fórmula para la función $f(x) = x^n$?

Elabora un resumen con todas tus ideas, argumentos y cuentas de las preguntas anteriores y con ellas aproxima el área bajo la curva de la función $f(x) = x^{10}$, de 0 a 1. Anexa todo el material a tu portafolio de evidencias.



Interpretación del área según el fenómeno

Para saber más

Primera ley de Newton

La primera ley de Newton, establece que un objeto permanecerá en reposo o con movimiento uniforme rectilíneo, al menos que sobre él actúe una fuerza externa.

¿Por qué las medidas de la acumulación resultan útiles para el tratamiento de diferentes situaciones contextuales?

Posición, velocidad y aceleración

En las secciones anteriores, aprendiste qué es el área bajo la curva y calcularla de manera exacta cuando es una función constante o lineal, y a aproximarla usando sumas superiores, inferiores y trapezoidales. En esta unidad exploraremos la primera de sus aplicaciones de este tipo de herramientas.

Imagina la siguiente situación hipotética. Una agencia espacial lanza al espacio un objeto que cumple la primera ley de Newton, tiene una velocidad constante de 5 m/s. Usando funciones podemos expresar a la velocidad dependiendo del tiempo y, en este caso, el resultado es la función constante:

$$\begin{aligned} v:&[0,\infty)\to\mathbb{R} \\ t\ &\mapsto 5 \end{aligned},$$

donde la variable t representa a los segundos y debes leer $v(t)$ en metros sobre segundo. A la izquierda tienes la gráfica de esta función.

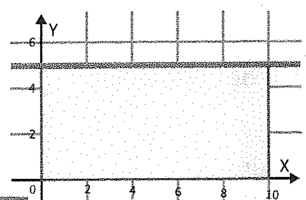


Figura 1.33

¿Cómo podemos decir cuánta distancia ha recorrido el objeto en 10 segundos? De tus clases de Física, recuerda que cuando tienes velocidad constante, la distancia recorrida es igual a la velocidad por el tiempo, en fórmulas, tenemos que:

$$d = vt_0.$$

En nuestro caso, el tiempo t_0 es de 10 segundos y la velocidad de 5 m/s, por lo tanto, $d = 10\text{ s}\cdot 5\text{ m/s} = 50\text{ m}$, así que el objeto habrá recorrido en total 50 m en 10 segundos.

¿La fórmula de la distancia te recordó a alguna fórmula que hayas visto previamente? Dado que el intervalo del tiempo es de 0 a 10 segundos, dibujemos algunas líneas auxiliares que pueden servir.

Observa en la imagen que dibujamos, el área bajo la curva de la función $v(t) = 5$, de 0 a 10. Como la función es constante, por lo que viste en la unidad anterior, lo que tenemos es un rectángulo cuya base es $b = 10 - 0 = 10$ y cuya altura es $h = 5$.

¿Observas algo? En este caso tenemos que la medida de la base b es igual al tiempo t_0 y que la altura h es igual a v. Por lo tanto, en el caso de objetos con velocidad constante concluimos que:

> El área bajo la curva de la función $v(t) = c$, del tiempo t_0 a t_1, es igual a la distancia recorrida por el objeto del tiempo t_0 a t_1.

Vamos a cambiar un poco nuestra situación inicial: imagina que a nuestro objeto no le importan para nada las leyes de nuestro universo y decide moverse con una velocidad uniformemente acelerada, en este caso supongamos que la función que describe a la velocidad es:

$$\begin{aligned} v &: [0,\infty) \to \mathbb{R}. \\ t &\mapsto 5t \end{aligned}$$

Así, ¿cómo podemos calcular la distancia que ha recorrido el objeto en 10 segundos? Como la velocidad no es constante, no podemos simplemente multiplicar la velocidad por el tiempo, debemos proceder con mayor cuidado.

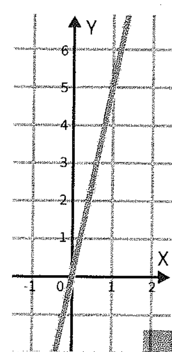


Figura 1.34

Para resolver este problema, tomemos cinco mediciones y calculemos en cada una la distancia recorrida, al final, sumamos y tendremos una aproximación del total de la distancia.

En la tabla están las mediciones:

	De 0 a 2 segundos	De 2 a 4 segundos	De 4 a 6 segundos	De 6 a 8 segundos	De 8 a 10 segundos
Distancia máxima recorrida	$t = 2 - 0 = 2$ s $v = 10$ m/s $d = 20$ m	$t = 4 - 2 = 2$ s $v = 20$ m/s $d = 40$ m	$t = 6 - 4 = 2$ s $v = 30$ m/s $d = 60$ m	$t = 8 - 6 = 2$ s $v = 40$ m/s $d = 80$ m	$t = 10 - 8 = 2$ s $v = 50$ m/s $d = 100$ m

Por lo tanto, decimos que el objeto aproximadamente recorrió 300 metros en esos 10 segundos.

En la imagen hay un dibujo de lo que representa la tabla anterior. Lo que hicimos, en ves de trabajar con la función original fue partirla en pedazos de funciones constantes.

Viéndolo de esta manera, ¿qué crees que represente el valor de 300 calculado anteriormente? En este caso, esos 300 representan las sumas superiores de la función $v(t) = 5t$, de 0 a 10, usando una partición de cinco subdivisiones.

Ve que al tener una función lineal $v(t) = mt + b$ que representa la velocidad de un objeto, tomar las sumas superiores (inferiores) corresponde a aproximar la distancia recorrida por exceso (defecto) del objeto.

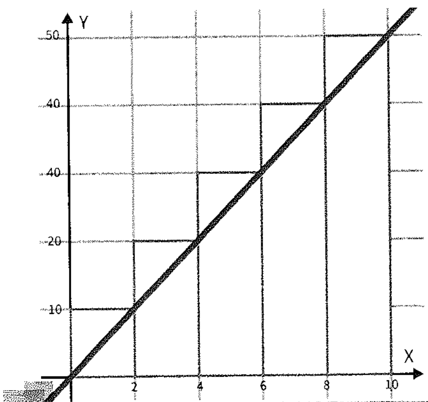


Figura 1.35

Con esto en mente, ¿cómo puedes determinar de manera exacta la distancia recorrida por el objeto, de 0 a 10 segundos? Usando la conclusión del párrafo anterior, una forma sería usando sumas superiores y particiones con cada vez más subdivisiones. Completa la tabla.

Subdivisiones	Suma superior	Subdivisiones	Suma superior
8		15	
10		20	

Usandoestatabla,concluimosqueaproximadamenteladistanciarecorridaes: ____________________.

Otra forma de proceder es calculando directamente el área bajo la curva de la función $v(t) = 5t$, en este caso es una función lineal y en la unidad anterior estudiamos este caso a detalle. Usando esta función, concluimos que el área bajo la curva de 0 a 10 es 250 unidades, por lo tanto, la distancia recorrida de 0 a 10 segundos es de 250 metros.

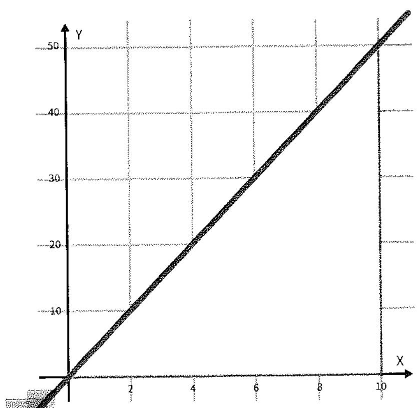


Figura 1.36

¿Ambas conclusiones son la misma? Analiza cada procedimiento y busca las diferencias y semejanzas.

El último escenario que vamos a considerar es el siguiente. El objeto que lanzamos al espacio ahora también tiene una aceleración creciente, a nuestro objeto le gusta destruir por completo las leyes del universo. ¿Cómo podrías decir cuál es la velocidad del objeto a los 10 segundos?

Recuerda que la aceleración es el cambio de velocidad respecto al tiempo, así que en analogía con el caso anterior podemos decir que si la función $a(t)$ representa la aceleración respecto al tiempo, entonces el área bajo la curva de 0 a 10 segundos es la velocidad del objeto a los 10 segundos.

Por ejemplo, si la función de aceleración es $a(t) = t^2$, entonces, para calcular la velocidad podemos aproximarla usando sumas superiores. Para ello llena la tabla, usa la fórmula que viste antes.

Subdivisiones	Suma superior	Subdivisiones	Suma superior
8		50	
10		100	
15		1000	

Usando esta tabla concluimos que aproximadamente la velocidad es: __________________________.

Para concluir, podemos resumir lo visto y conectarlo con tu curso de Cálculo diferencial, usando la tabla.

Tenemos la función de	Acción	Tenemos la función de	Acción	Tenemos la función de
Distancia	Derivo	Velocidad	Calculamos el área bajo la curva	Distancia
Velocidad	Derivo	Aceleración	Calculamos el área bajo la curva	Velocidad

Observa que derivar y calcular áreas bajo la curva son operaciones contraria una a la otra, más adelante formalizaremos esto, usando el concepto de integral.

Actividad de aprendizaje 14

Responde los problemas en tu cuaderno, justifica todas tus respuestas y elabora un dibujo para cada uno.

1. La velocidad de una pelota que cae al vacío está dada por $v(t) = 100 + 1.03t$ en m/s. Determina cuál es la distancia recorrida al minuto, a la hora y después de un día.
2. Una partícula acelera siguiendo la función $a(t) = 0.14t$ en km/h². Determina cuál es la velocidad de la partícula a los 0, 10 y 100 segundos.
3. Dejamos caer una pelota desde lo alto de un edificio de 800 metros, la velocidad de la pelota es de $v(t) = 30 + 9.8t$ en metros por segundo, imagina además que la pelota no rebota al tocar el suelo. Determina cuál es la distancia que recorre la pelota a los 1, 10, 100 y 1000 segundos.

Actividad de aprendizaje 15

Productos esperados

Imagina que lanzamos al espacio una pelota y que milagrosamente la distancia de la pelota respecto a la Tierra está dada por:

$$d(t)=7t+\frac{47t^2}{2}+t^3.$$

Usando lo que aprendiste en tu curso de Cálculo diferencial, determina cuál es la velocidad y la aceleración instantánea de ese objeto. Escribe en el espacio tu respuesta.

- La velocidad instantánea es $v(t) =$ ________. La aceleración instantánea es $a(t) =$ ____________.

Ahora, con las funciones $v(t)$ y $a(t)$ determina en tu cuaderno:

- La velocidad y la distancia del objeto a los 1, 10 y 100 segundos.

Finalmente llena la tabla.

$d(1) =$	$d(10) =$	$d(100) =$
$v(1) =$	$v(10) =$	$v(100) =$

Escribe un resumen y anota las conclusiones de lo que observes. Intégralo a tus evidencias.

Entrena tus conocimientos

Responde los ejercicios usando lo aprendido en este parcial.

1. Determina cuáles de las funciones son crecientes, ya sea total o parcialmente. Esboza cada una de sus gráficas, resaltando las partes donde sean crecientes.

$f(x) = 4$	$f(x) = -2x$	$f(x) = 3x$	$f(x) = \lvert x/2 \rvert$
$f(x) = 5x^2$	$f(x) = x/2$	$f(x) = x^3$	$x = 2$

2. En cada uno de los incisos, especifica si se trata de una función lineal o no lineal.

$f(x) = 1$	$f(x) = -5x$	$f(x) = 2x$	$f(x) = \lvert x/3 \rvert$
$f(x) = 5x^2$	$f(x) = x/4$	$f(x) = x^3$	$f(x) = 2x^2/3$

3. Por el método de aproximación con n subdivisiones, usando rectángulos, calcula el área bajo la curva de la función $f(x) = 2x$, de 0 a 20, usando las fórmulas que ya conoces. Llena la tabla.

10		30	
20		50	

Elabora el dibujo correspondiente para 2, 5 y 10 rectángulos.

4. Usando el método de aproximación mediante trapecios, calcula el área bajo la curva de la función del ejercicio anterior, llenando posteriormente una tabla similar.

5. Mediante el uso del método de aproximación de rectángulos inscritos, completa la tabla.

De 0 a 10, con una partición de 25 partes.	$S_1 =$	$S_2 =$	
De 0 a 10, con una partición de 50 partes.	$S_1 =$	$S_2 =$	

6. Compara los tres métodos (usando rectángulos, trapecios y rectángulos inscritos) para aproximar el área bajo la curva sen(x), de 0 a π.

7. Calcula el área absoluta bajo la curva de la función $f(x)$ 3π, de 0 a 2π.

8. Calcula el área bajo la curva de la función $f(x) = 0.5x + \pi$, de $-\pi$ a 2π.

9. Calcula el área absoluta bajo la curva de la función $f(x) = -x^2/2$, de 0 a 50.

Suma anécdota

Estar bien bajo situaciones de mucho estrés resulta de gran importancia. ¿Te imaginas calcular matemáticas a mitad de una guerra? Aunque la pregunta te resulte extraña, es lo que Alan Mathison Turing (23 de junio de 1912 - 7 de junio de 1954) tuvo que afrontar.

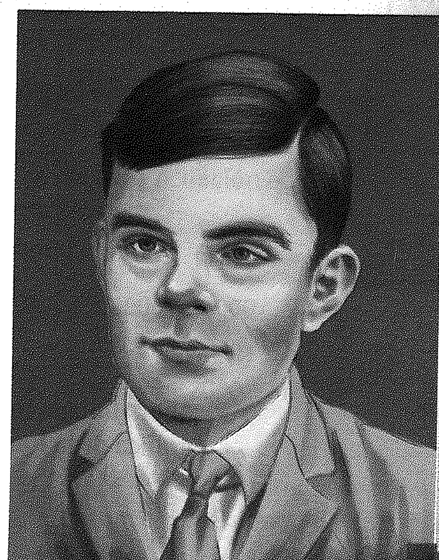


Figura 1.37
Alan Turing

Cuando Inglaterra entró a la Segunda Guerra Mundial, Turing fue convocado por el Servicio Británico de Descifrado para descifrar las comunicaciones alemanas.

Gracias al trabajo de Turing y de varias personas más se descifró el sistema usado por Alemania, salvando muchas vidas. Algunos historiadores dicen que el trabajo de Turing acortó dos años la duración de la guerra, salvando alrededor de 14 millones de vidas.

Date cuenta que tener tu cabeza clara en momentos muy complicados es fundamental, es por eso que siempre debes respirar e intentar tomar las decisiones de la mejor manera posible.

Reflexiona con tus compañeros acerca de lo siguiente.

1. ¿Te has enfrentado a algún problema matemático sin tener idea de cómo resolverlo?
2. ¿Cómo has reaccionado a esa situación?
3. ¿Al final has resuelto dicho problema?
4. ¿Has pedido ayuda a tu profesor o a algún compañero?
5. ¿Has aprendido algo nuevo de esta experiencia?
6. ¿Qué relación existe entre los sentimientos que tienes al enfrentarte a un problema matemático y lo que sientes al presentarse problemas en tu vida diaria?
7. ¿Qué acciones realizas para superar cada tipo de problema? ¿Puedes usar las mismas técnicas?

Si te interesa saber más acerca de este personaje y su historia, puedes leer algunas de sus biografías. Algunos ejemplos de éstas son: *El hombre que sabía demasiado* de David Leavitt, *El pionero de la era de la información* de B. Jack Copeland y *The enigma* de Andrew Hodges. Ésta última tuvo su adaptación cinematográfica llamada *El código enigma*, donde el actor Benedict Cumberbatch interpreta a Alan Turing de una manera exagerada, ya que la personalidad de Alan no es tan excéntrica como el personaje de la película, y aún así, tanto la película como el actor recibieron muchas nominaciones a premios cinematográficos.

CIERRE

Proyecto integrador

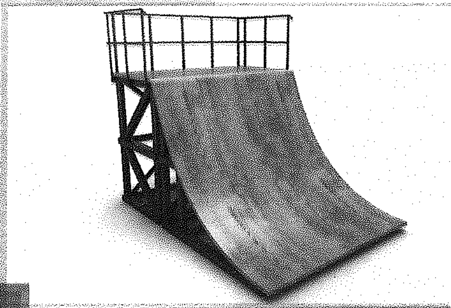


Figura 1.38

En equipos formados por tu profesor, vamos a determinar cómo construir una rampa de patinaje como el de la imagen a la izquierda. Para ello, primero respondan las siguientes preguntas:

- ¿Cómo pueden determinar el área de los paneles laterales?

- ¿Cómo pueden determinar el área del panel de enfrente?

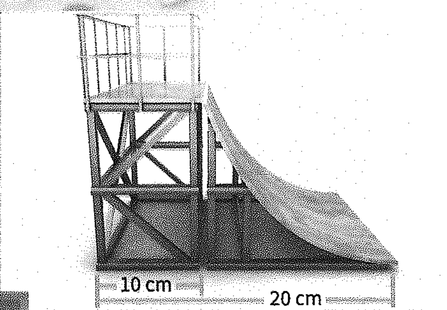


Figura 1.39

Ahora imaginen que el contorno curvo del panel lateral está dado por la gráfica de la función

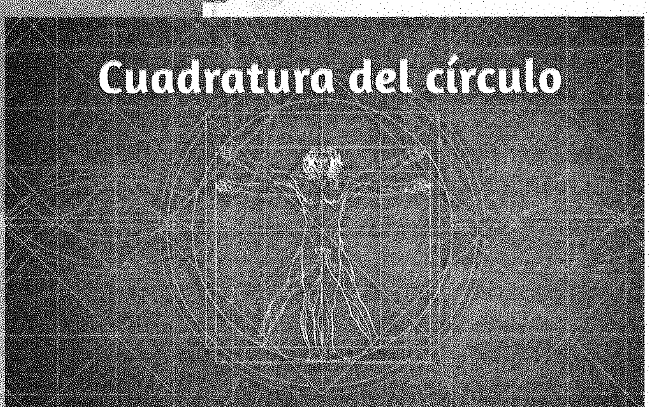
$$f(x)=\frac{1}{10}x^2.$$

- Si la rampa debe medir 10 cm en la parte rectangular y 20 cm en la parte que corresponde a la función $f(x)$. ¿Cuál es el área del panel lateral?

- ¿Cuánto material creen necesitar para construir una rampa de ese estilo si el ancho es de 20 cm?

Digital BM

Para corroborar sus estimaciones, elaboren un prototipo de rampa, usando papel cascaron y materiales fáciles de obtener.



Cuadratura del círculo

El cálculo de áreas ha sido un problema muy recurrente para la humanidad.

Uno de los problemas que traspasaron su área de origen, que en este caso es la geometría, fue el de la cuadratura del círculo, que se trata de calcular un círculo y un cuadrado cuyas áreas sean las mismas. La respuesta terminó siendo un número irracional.

Hacia la prueba Planea

1. La producción de celulares de cierta compañía en el primer semestre del año está dada por la tabla:

Enero	Febrero	Marzo
100	125	150
Abril	Mayo	Junio
175	200	225

Tomando en cuenta esta información, ¿cuál es la pendiente de la función que describe esta situación?

a. 19 b. 20 c. 25 d. 35

Si $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$ es la regla de correspondencia, entonces el resultado de $f(1) - f(2)$ es:

a. −9 b. 9 c. 14.5 d. 12.5

Miguel está haciendo un experimento que consiste en dejar caer una piedra y ver la relación entre los metros que cae y los segundos en los que llega al suelo. Los datos se observan en la tabla:

	1	2	3
	5	20	45

¿Cuál es la regla de correspondencia entre la distancia recorrida por la piedra y el tiempo transcurrido (t)?

a. $5t^2$ b. $5t^3$
c. $15t - 10$ d. $25t - 30$

Se tienen dos termómetros, uno en grados Fahrenheit (°F) y el otro en centígrados (°C). Observa la tabla e identica la ecuación que los relaciona.

	50	131	203
	10	55	95

a. °C − °F = 0 b. °C − °F + 32 = 0
c. $\frac{9}{5}$°C−°F+32=0 d. $\frac{9}{5}$°F−°C=0

2. El salario de un obrero depende de sus años de experiencia, como lo muestra la tabla.

Años	1	2	3
Salario	2 000	3 000	6 000

¿Cuál es la ecuación con la que se calcula su salario?

a. $y = 2000x$
b. $y = 2000x + 3000$
c. $y = 3000 - 2000x + 1000x^2$
d. $y = 3000 + 2000x - 1000x^2$

Si $f(x) = x^3 + x^2 + 2$ es la regla de correspondencia, entonces el resultado de $f(5) - f(0)$ es:

a. 154 b. 152 c. 150 d. 125

La distancia que recorre un móvil durante cierto intervalo de tiempo está dada por la tabla:

	4	5	6
	1	6	13

¿Qué expresión algebraica es la que se asocia a la distancia recorrida por el móvil?

a. $y = x^2 - 3x - 3$ b. $y = x^2 - 6x + 11$
c. $y = x^2 - 3x - 5$ d. $y = x^2 - 4x + 1$

7. Una tienda naturista vende jalea real por Internet, la tabla muestra la cotización de frascos de 250 g incluyendo gastos de envío:

	4	5	12
	320	380	800

¿Cuál es la expresión con la que se determina el importe de un pedido?

a. $60x + y - 80 = 0$ b. $60x + y + 80 = 0$
c. $60x - y + 80 = 0$ d. $60x - y - 80 = 0$

Evalúa tus evidencias

Productos	Criterios	Sí	No
Aproximación del área por medios diversos.	La información presentada es verídica y demuestra una investigación profunda.		
	La información investigada se presenta en una tabla.		
	La gráfica presentada está en correspondencia con la información de la tabla.		
Comparativa del valor del área por medio de rectángulos y de trapecios inscritos.	Se presenta una tabla comparativa satisfactoria.		
	Se apoya la información con gráficas claras.		
	Se da una conclusión significativa.		
Aproximación del valor del área bajo una curva del tipo $y = x^n$.	Los datos presentados son correctos.		
	Se presenta una gráfica para respaldar los mismos.		
	Se da una conclusión significativa.		
Cálculo del desplazamiento de un móvil, dado su velocidad.	Se presenta un gráfico que describe la situación.		
	El cálculo realizado es correcto y puntual.		
	Al cálculo le acompaña una conclusión puntual.		
Reconocer y argumentar las relaciones entre posición, velocidad y aceleración para funciones polinomiales básicas	La información presentada es verídica y demuestra una investigación profunda.		
	Se presenta en una tabla la información investigada.		
	La gráfica presentada está en correspondencia con la información de la tabla.		

Rúbrica

Aprendizajes esperados	Básico	Autónomo	Estratégico
Aproxima el área bajo una curva mediante rectángulos inscritos, se mide o calcula el área de éstos y se estima el valor del área bajo la curva.	Sé qué es el área bajo la curva y conozco algunos ejemplos de cómo calcularla.	Entiendo cómo se calcula el área bajo la curva mediante rectángulos inscritos.	Resuelvo problemas concretos mediante el calculo del área bajo la curva, usando rectángulos inscritos.
Compara los resultados de diversas técnicas de aproximación.	Conozco una de las técnicas de aproximación de áreas (mediante rectángulos, trapecios o rectángulos inscritos).	Comprendo las diferencias entre los tres métodos de aproximación de área bajo una curva.	Aplico los tres métodos de aproximación de áreas bajo una curva a ejemplos concretos.
Acota el valor del área bajo la curva, aproximando por exceso y por defecto. Usa ambos métodos de aproximación: rectángulos y trapecios.	Comprendo en qué consiste acotar el valor del área bajo la curva.	Sé acotar el valor del área bajo la curva, aproximando por exceso y por defecto, mediante los métodos de aproximación, usando rectángulos y usando trapecios.	Resuelvo problemas concretos mediante el acotamiento del valor del área bajo la curva, usando los métodos de aproximación, usando rectángulos y usando trapecios.
Calcula el área debajo de curvas conocidas, como gráficas de funciones lineales, cuadráticas y cúbicas entre dos límites de integración.	Calculo el área debajo de curvas conocidas, como gráficas de funciones lineales entre dos límites de integración.	Calculo el área debajo de curvas conocidas, como gráficas de funciones lineales y cuadráticas entre dos límites de integración.	Calculo el área debajo de curvas conocidas, como gráficas de funciones lineales, cuadráticas y cúbicas entre dos límites de integración.
Interpreta, por extensión o generalización, el área bajo la curva de gráficas de funciones trigonométricas básicas (seno y coseno).	Entiendo cuál es el área bajo la curva de la gráfica de las funciones trigonométricas básicas.	Aproximo, por extensión o generalización, el área bajo la curva de las funciones trigonométricas básicas.	Resuelvo problemas mediante la interpretación, por extensión o generalización, del área bajo la curva de funciones trigonométricas básicas

Segundo parcial

Eje: Pensamiento y lenguaje variacional

- Cambio y acumulación: elementos del Cálculo integral.

- Antiderivadas de las funciones elementales (algebraicas y trascendentes).

- Técnicas para obtener la antiderivada. ¿Qué significa integrar una función?, ¿podrías imaginar el llenado y vaciado de un recipiente en términos de la integración? ¿Qué patrones reconoces para la integral de x, x^2, x^3?
- Ejemplos de la cinemática y su interpretación contextual. ¿Qué es integrar en ese contexto de la física? ¿Integrar la función velocidad, integrar la función aceleración?
- Construcción de tablas de integración. ¿Reconoces patrones básicos?
- ¿Qué tipo de procesos se precisan para tratar con la acumulación y su medida, propiedades, relaciones y representaciones?

- Encuentra la antiderivada de funciones elementales (polinomiales).
- Reconoce el significado de la integral definida con el área bajo la curva.
- Descubre relaciones inversas entre derivación e integración: "Si de una función se obtiene su derivada, ¿qué obtengo si de esa derivada encuentro su antiderivada?"
- Interpreta, por extensión o generalización, la integral indefinida de funciones polinomiales y trigonométricas básicas (seno y coseno).

- Encontrar la antiderivada de expresiones del tipo x^n.
- Completar una tabla de integración dada.
- Calcular el área bajo la curva de funciones diversas.
- Integrar funciones elementales dadas mediante fórmulas generales.

Para reflexionar

¿Te sientes tranquilo contigo mismo y con las personas que te rodean?

¿Has dado las gracias por todo lo que tienes y por todo lo que te rodea?

¡Gracias!

Nuestro objetivo

Experimentar gratitud y expresarla de manera explícita y deliberada.

Paso a paso

Realiza, de manera individual lo que se pide.

1. Piensa en una persona en especial, la cual sea muy importante en tu vida y con quien te sientas agradecido. Cierra los ojos y piensa en todas las circunstancias que rodean a esa persona.
2. Escribe una carta de agradecimiento a esa persona. Explícale por qué te sientes agradecido y por qué la elegiste.
3. Escribe durante 10 minutos, no te preocupes por la redacción o el orden, escribe todo lo que lleves dentro de ti.
4. Guarda la carta, es tuya y sólo si tú quieres alguien más podrá leerla.

Responde las preguntas.

1. ¿Te sientes diferente? Describe qué sentiste antes, durante y después de escribir la carta.

2. ¿Cómo crees que esto te puede servir en la vida diaria?

Para terminar

Evita guardar tus sentimientos, es importante expresarlos y sobre todo decirle a las personas que te rodean qué sientes por ellas.

Proyecto de vida

En el semestre desarrollarás tu Proyecto de vida, con la finalidad de clarificar qué deseas para ti y puedas tomar decisiones que marquen la dirección de tu futuro, así como reflexionar acerca de las implicaciones que tiene en tu vida el hecho de llevarlo a cabo.

Organiza la información de tu Proyecto de vida.

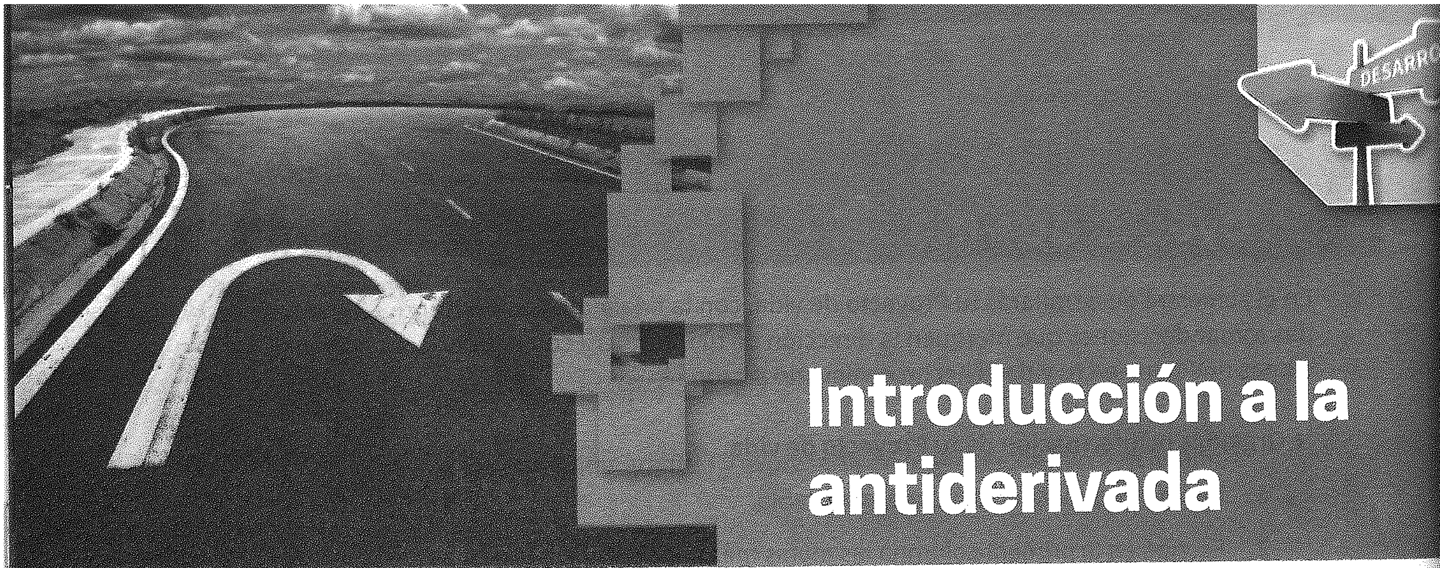
1. Copia y completa en tu cuaderno la tabla.
2. Escribe en la primera columna las metas más importantes que deseas lograr. Agrega las filas que sean necesarias.

Meta	Ideas importantes a rescatar	Acciones que debo llevar a cabo	Beneficios que representa para mí	Beneficios que representa para mi entorno

3. Una vez que organices la información en la tabla, léela con atención para que tengas un panorama de lo que implica el planteamiento de tu Proyecto de vida.
4. Escribe por qué consideras importante elaborar un Proyecto de vida.
5. Elabora un organizador gráfico donde incorpores frases que te motiven a trabajar día con día en tu Proyecto de vida, incluye tus metas para que las tengas presentes todo el tiempo. Coloca este organizador en un lugar visible en tu casa. Utiliza el esquema para hacer un esbozo y enriquécelo paulatinamente.

Proyecto de vida de: ______________________________

	Metas a corto plazo	Metas a mediano plazo	Metas a largo plazo
Personal			
Familiar			
Escolar			
Laboral			
Social			



Introducción a la antiderivada

En el parcial anterior, estudiaste el concepto de área bajo la curva, viste diferentes métodos para aproximar el área y los comparaste usando funciones muy conocidas.

En este parcial, verás el concepto de integración, cuál es su relación con la derivada y algunas propiedades que te permitan hacer los cálculos de manera más eficiente.

¿Qué significa integrar una función?

Figura 2.1
Gottfried Wilhelm Leibniz (Leipzig 1646-Hannover 1716).

La integración es uno de los procesos fundamentales del análisis matemático y, junto con la derivada, uno de los grandes logros del siglo XVII.

En tu curso de cálculo diferencial viste que la derivada es la pendiente de la recta tangente en un punto y se obtiene mediante el cálculo de un límite (una aproximación muy fina). Podemos decir que la integración, a grandes rasgos, es una suma infinita de piezas sumamente pequeñas.

La idea de fondo detrás de la integración ya existía desde mucho tiempo atrás. Los egipcios la usaron para determinar ciertos volúmenes, después, personas como Arquímedes y Descartes también usaron ideas similares para obtener algunos resultados. Formalmente, el cálculo integral y diferencial se originaron (de manera independiente) con los trabajos de Leibniz y de Newton en el siglo XVII, de hecho la notación que usaremos viene directamente de los trabajos de Leibniz. Sin embargo, la teoría del cálculo diferencial se formalizó por completo con el trabajo de personas como Cauchy y Riemann.

Después daremos la definición formal de una integral definida, por ahora sólo veremos el concepto de la integral indefinida y la primitiva o la antiderivada de una función.

Para las funciones $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ y $F:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, diremos que $F(x)$ es una **primitiva** o **antiderivada** de $f(x)$ si

$$F'(x) = f(x),$$

es decir, si la derivada de $F(x)$ es igual a $f(x)$.

En tu curso de cálculo diferencial viste que la derivada de una función constante es igual a cero, por lo tanto, si una función $f(x)$ tiene una primitiva $F(x)$, entonces la función $f(x)$ tiene una cantidad infinita de primitivas, en específico, todas las funciones $F(x) + c$ son primitivas de $f(x)$, donde c es un número real fijo.

La **integral indefinida** de una función $f(x)$ es el conjunto de todas las primitivas y se representa por

$$\int f(x)dx,$$

la cual se lee como: "la integral de f de x, respecto a x".

En esta expresión están presentes los siguientes elementos.

1. El signo de integración $\int$.
2. La función a integrar o integrando $f(x)$.
3. El diferencial de x denotado por dx.

Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ se tiene que:

$$\int f(x)dx = F(x) + c.$$

Es muy importante que recuerdes la constante c, en ocasiones específicas tendrás que encontrar el valor adecuado de la constante, más adelante estudiaremos esos casos.

Ejemplo

Encontremos una primitiva de la función $f(x) = 1$.

De acuerdo con la definición, debemos encontrar una función $F(x)$, tal que, su derivada sea igual a 1, ¿tienes alguna idea o recuerdo de tu curso de Cálculo diferencial?

En este caso, observa que:

$$\text{si } F(x) = x, \text{ entonces } F'(x) = 1.$$

Por lo tanto, $F(x) = x$ es una primitiva de $f(x) = 1$ y así concluimos que:

$$\int f(x)dx = \int 1dx = x + c.$$

En este momento, determinar la primitiva de una función es un proceso de memoria y tendrás que recordar las derivadas de las funciones usuales para resolver problemas de mayor complejidad.

Más adelante veremos algunos teoremas para resolver ejercicios de manera sencilla y situaciones de la vida real donde se necesita encontrar la primitiva de una función.

Actividad de aprendizaje 1

En cada inciso, realiza lo que se solicita.

1. Como has visto, este curso está íntimamente ligado con tu curso de Cálculo diferencial, por lo tanto, es necesario que recuerdes todas las propiedades de la derivada. Escribe en las líneas las propiedades de la derivada, en particular, las reglas de la cadena, del producto y de la suma.

   ____

   ____

   ____

2. Investiga acerca de la integral. Elabora en tu cuaderno un resumen con información sobre:
   a. Los aportes de Newton y Leibniz.
   b. La relación de la integral con la derivada.
   c. La importancia de la integral en la vida diaria.

3. Calcula las integrales.

   a. $\int 2dx =$ ______________ b. $\int -\frac{2}{7}dx =$ ______________

   c. $\int -x\,dx =$ ______________ d. $\int (x+1)dx =$ ______________

4. ¿Encontraste algún patrón en las integrales previas? Anota en el espacio todas tus ideas y justifícalas.

   ____

   ____

   ____

Propiedades de la integral indefinida

Determinar la primitiva de una función dada puede ser una tarea complicada, incluso en muchas situaciones de la vida real es algo imposible.

Tus primeras herramientas son tu ingenio y tu memoria, para ello te invitamos a que recuerdes qué aprendiste en tu curso de Cálculo diferencial.

Completa la tabla que siguiente.

Función	Derivada	Función	Derivada
$f(x)=c$		$f(x)=x^4-x^7$	
$f(x)=5x$		$f(x)=\dfrac{x^2-5}{x+1}$	
$f(x)=-x^2$		$f(x)=\operatorname{sen}(x)$	
$f(x)=\dfrac{-1}{x}$		$f(x)=x\cos(x)$	
$f(x)=y+x$		$f(x)=\operatorname{sen}(x^2)$	
$f(x)=e^x$		$f(x)=\ln(x)$	
$f(x)=\operatorname{sen}(x)-x$		$f(x)=\log_{10}(x)$	

A continuación, se da una lista de propiedades que te pueden ser útiles.

Sean $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dos funciones.

- Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ y $G(x)$ es una primitiva de $g(x)$, entonces $(F+G)(x)$ es una primitiva de $(f+g)(x)$.

  En particular: $\int(f+g)(x)dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx.$
- Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ y c es una constante real, tenemos que $cF(x)$ es una primitiva de $cf(x)$.

  En particular: $\int(cf)(x)dx=c\int f(x)dx.$
- Si $f^{-1}(x)$ es la función inversa de $f(x)$ y $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, entonces:

$$\int f^{-1}(x)dx=xf^{-1}(x)-F\left(f^{-1}(x)\right)+c.$$

- Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, por consiguiente:

$$\int F'(x)dx=F(x)+c.$$

Nota que las propiedades de la antiderivada son pocas, más adelante estudiarás algunos métodos para resolver diferentes situaciones.

Por otra parte, es muy importante que no te confundas y quieras inventar algunas fórmulas.

Observa las afirmaciones y recuerda que **la integral del producto y la división de funciones no son tan simples como en el caso de la derivada.**

1. La integral del producto de dos funciones no es el producto de las integrales, esto es:

$$\int f(x)g(x)dx \neq \int f(x)dx \int g(x)dx.$$

2. La integral de la división de dos funciones no es la división de las integrales, esto es:

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}dx \neq \frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx}.$$

Ejemplos

1. Consideremos las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = \operatorname{sen}(x)$.

De tu curso de Cálculo diferencial sabes que la derivada de $\frac{1}{2}x^2 + c$ es x y que, además, la derivada de $-\cos(x) + c$ es $\operatorname{sen}(x)$, ya que c es una constante.

Por lo tanto: $\int f(x)dx = \frac{1}{2}x^2 + c$ y $\int g(x)dx = -\cos(x) + c$.

Así: $\int (f+g)(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx = \frac{1}{2}x^2 - \cos(x) + c$.

Consideremos ahora: $\int \frac{1}{10}f(x)dx = \frac{1}{10}\int f(x)dx = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{2}x^2 + c\right)$.

Puesto que la derivada de $(\frac{1}{10})(\frac{1}{2}x^2 + c)$ es $(\frac{1}{10})x$, es decir, $(\frac{1}{10})f(x)$.

2. Consideremos las funciones $f(x) = 6x^5 - 3x^2$ y $g(x) = \frac{1}{x}$.

De tu curso de Cálculo diferencial, sabes que la derivada de $x^6 - x^3 + c$ es $6x^5 - 3x^2$ y la derivada de $\ln(x) + c$ es $\frac{1}{x}$, ya que c es una constante.

Por consiguiente: $\int f(x)dx = x^6 - x^3 + c$ y $\int g(x)dx = \ln(x) + c$.

Así: $\int (f-g)(x)dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx = x^6 - x^3 - \ln(x) + c$, finalmente

$$\int -\frac{8}{7}g(x)dx = -\frac{8}{7}\int g(x)dx = -\frac{8}{7}(\ln(x) + c).$$

Calcular la primitiva de una función es un proceso que debes efectuar con calma y recordando lo aprendido en tu curso de Cálculo diferencial. Como resumen, recuerda que la integral indefinida:

sí se distribuye sobre	no se distribuye sobre
sumas	multiplicaciones
restas	divisiones

son

Actividad de aprendizaje 2

En cada inciso, realiza lo que se pide.

1. Es necesario que recuerdes muy bien cómo derivar funciones, para ello completa la tabla. Efectúa todas las operaciones necesarias en tu cuaderno.

Función	Derivada	Función	Derivada
$f(x) = -8$		$f(x) = 8x^{-2} - 4x^3$	
$f(x) = 5x - 8 + x^{-1}$		$f(x) = \dfrac{\text{sen}(x) - x}{x+1}$	
$f(x) = -x^2 + \text{sen}(x)$		$f(x) = \text{sen}(x)\cos(2x)$	
$f(x) = \dfrac{-1}{\ln x}$		$f(x) = e^x\cos(e^x)$	
$f(x) = y^x + x^y$, donde y en este caso es una constante.		$f(x) = \ln(\text{sen}((x+1)^2))$	
$f(x) = e^{x + \ln x - 5}$		$f(x) = \ln(x)\cos(x)$	
$f(x) = \cos(x)\text{sen}(x)e^x$		$f(x) = \log_{10}(e^x)$	

da

de

2. Calcula las integrales. Escribe todos los pasos necesarios en el espacio en blanco.

a. $\int\left[-\frac{1}{5}x + \frac{\text{sen}(x)}{3}\right]dx =$

b. $\int\left[\frac{21-x}{7} - \frac{1}{9}\right]dx =$

c. $\int\left[\cos^2(x) + \text{sen}^2(x)\right]dx =$

d. $\left[\int 1 + \tan^2(x)\right]dx =$

o

¿Qué patrones reconoces para la integral de x, x^2, x^3?

Determinaremos las integrales más sencillas: funciones constantes y funciones monomiales. Con esto y con las propiedades de la integral indefinida, podrás resolver la integral de cualquier función polinomial.

Antes de iniciar, completa la tabla, calculando las derivadas que se piden.

Función	Derivada	Función	Derivada
$f(x) = 5$		$f(x) = 3x$	
$f(x) = -x^2$		$f(x) = 0.5x^3$	
$f(x) = 190x^5$		$f(x) = -x^{10}$	
$f(x) = x^{100}$		$f(x) = -0.25x^{150}$	

Consideremos **la función constante**, es decir, la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definida por $f(x) = k$, y determinemos una primitiva $F(x)$ de $f(x)$.

Recuerda que para encontrar la primitiva, debemos hallar una función cuya derivada sea la función $f(x)$, ¿se te ocurre alguna idea?

Es sencillo, observa tu tabla anterior y considera la función $F(x)$, dada por $F(x) = kx$, así: $F'(x) = k$.

De esto tenemos:

$$\int k\,dx = kx + c. \quad (1)$$

Un truco que te puede servir es: en la tabla anterior rellenaste la segunda y cuarta columnas, la antiderivada consiste en olvidar lo que estaba escrito en la primera y tercera columnas y encontrar el valor indicado.

Ejemplo

Consideremos **la función lineal**, es decir, sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definida por $f(x) = mx$, donde m es cualquier constante, y determinemos una primitiva $F(x)$ de la función $f(x)$. ¿Se te ocurre alguna idea?

Es sencillo, observa tu tabla anterior y considera la función $F(x)$ dada por $F(x) = \frac{1}{2}mx^2$, así: $F'(x) = mx$, por tanto:

$$\int mx\,dx = \tfrac{1}{2}mx^2 + c. \quad (2)$$

Con esto podemos hacer ejercicios más complicados.

Ejemplo

Sea $f(x)$ una función lineal, cuya gráfica es una línea recta que pasa por la coordenada (0, 1) y con pendiente igual a –10.

Determinaremos la integral indefinida de la función $f(x)$.

En este caso tenemos que la función $f(x)$ está dada por: $f(x) = -10x + 1$.

Por las propiedades de la integral indefinida (Propiedad 1), nos damos cuenta que la integral indefinida que nos interesa, es la suma de dos integrales: la que corresponde a $-10x$ y la que corresponde a 1.

Finalmente, usando las fórmulas (1) y (2), que dimos en esta sección, vemos que:

$$\int f(x)dx = \int -10x\,dx + \int 1dx = -5x^2 + x + c.$$

Ahora, consideremos **la función cuadrática**, es decir, la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definida por $f(x) = mx^2$, donde m es cualquier constante, y determinemos una primitiva $F(x)$ de $f(x)$. ¿Tienes alguna idea?

Es sencillo, observa tu tabla anterior y considera la función $F(x)$ dada por $F(x) = \frac{1}{3}mx^3$, donde m es cualquier constante, y tenemos $F'(x) = mx^2$, por consiguiente:

$$\int mx^2\,dx = \frac{1}{3}mx^3 + c.$$

Finalmente, consideremos **la función cúbica**, es decir, la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definida por $f(x) = mx^3$, con m cualquier constante, y determinemos una primitiva $F(x)$ de la función $f(x)$. ¿Se te ocurre alguna idea?

Es sencillo, observa tu tabla anterior y considera la función $F(x)$ dada por $F(x) = \frac{1}{4}mx^4$. Por lo tanto: $F'(x) = mx^3$, así:

$$\int mx^3\,dx = \frac{1}{4}mx^4 + c.$$

Con todo esto, podemos resolver ejercicios más complicados, por ejemplo: dada la función:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 0.1x - 5.$$

Determinaremos una antiderivada. Para esto usaremos las propiedades de la integral indefinida, las cuales dicen que basta con encontrar las antiderivadas de las funciones x^3, $-2x^2$, $0.1xy - 5$.

Ahora, usando lo aprendido en esta sección vemos que la función dada por:

$$F(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+0.05x^2-5x,$$

es una antiderivada de $f(x)$. Así:

$$\int(x^3-2x^2+0.1x-5)dx=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+0.05x^2-5x+c.$$

Nota que hallar la antiderivada de una función polinomial es más bien un ejercicio de memoria y de observación, más adelante verás métodos para determinar las integrales de más funciones.

Actividad de aprendizaje 3

Determina las integrales, recuerda escribir a detalle los pasos que seguiste.

1. $\int 8x^3-\frac{\frac{8}{7}}{9}x+0.5dx=$
2. $\int -9x^2-2x^3+11x-9dx=$
3. $\int -10x^5\,dx=$
4. $\int (2x+7)^3\,dx=$
5. $\int \left((x-1)^2-(x+7)^2\right)^2 dx=$

Actividad de aprendizaje 4

Productos esperados

En este momento, conoces expresiones para las integrales de funciones polinomiales de grado a lo más tres. En una hoja copia y completa la tabla.

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
x^1	$\frac{1}{1+1}x^{1+1}$	$x^{[illegible]}$	
x^2		x^3	

Función	Primitiva	Función	Primitiva
x^3		x^{10}	
x^5		x^7	

Respeta los códigos de colores. Al final, añade esta tabla a tu portafolio de evidencias.

Primera parte del teorema fundamental del cálculo

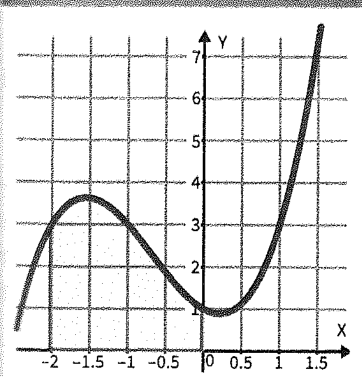
Para hablar del teorema fundamental del cálculo, es necesario introducir nuevos conceptos y volver al tema del área bajo la curva.

Consideremos una función continua $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, tomemos un número a constante.

En el parcial anterior vimos qué es el área bajo la curva de la función f en cierto intervalo $[a, b]$. Consideremos $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1$ y un valor fijo de -2 para a.

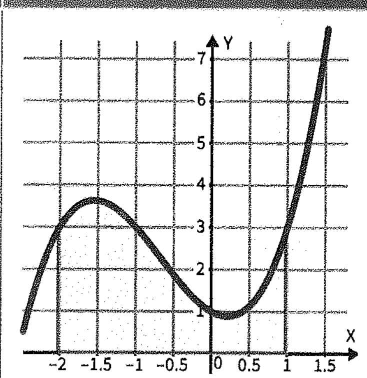
Observa que en las imágenes, dependiendo del valor de b, se obtienen diferentes valores numéricos para el área bajo la función f en el intervalo $[a, b]$.

$b = 0$



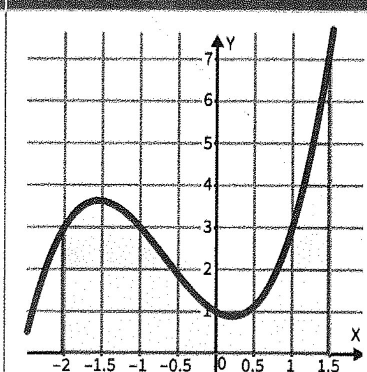
Área bajo la curva: 5.33.

$b = 1$



Área bajo la curva: 6.75.

$b = 1.5$



Área bajo la curva: 9.22.

Como puedes ver, fijado el extremo izquierdo, creamos una función a la cual, según el valor de b, le asignamos el área bajo la curva del intervalo $[a, b]$.

Denotamos esta función como:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

y se le conoce como la función de acumulación de $f(t)$.

A continuación, se listan los elementos de la función obtenida.

- El signo de integración $\int_a^b$, con inicio en a y final en b.
- Esto indica que nos interesa el área bajo la curva dentro del intervalo delimitado por a y b.
- La función a integrar o integrando $f(t)$.
- Es la función que nos interesa determinar su área bajo la curva.
- El diferencial de t denotado por dt.

Ejemplo

Consideremos la función: $f(t) = t$.

En este caso, tomemos $a = 0$ y por lo tanto la función de acumulación de $f(t)$ es:

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x t\,dt,$$

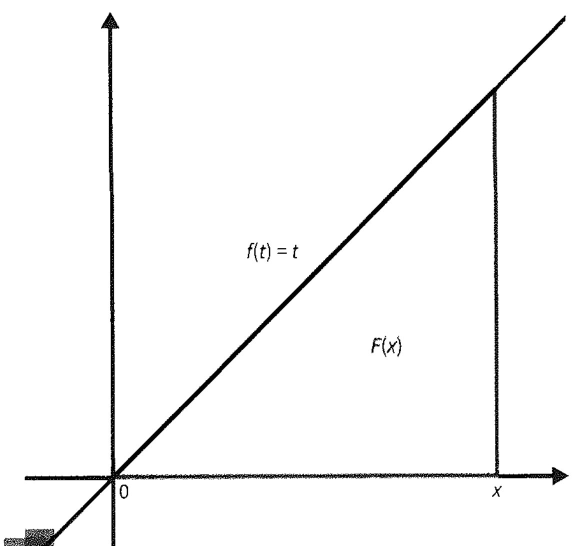


Figura 2.2

en la figura 2.2 puedes observar cómo se ve el área bajo la curva de la función $f(t)$.

Observa que el área bajo la curva es el área de un triángulo cuya base y altura mide x.

Por tanto el área de ese triángulo es: $\frac{1}{2}x^2$, así:

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x t\,dt = \frac{x^2}{2}.$$

¿Esto te recuerda a algo? ¿Cuál es una primitiva de la función t?

En este caso, y en todos, para encontrar la función de acumulación de la función $f(t)$, simplemente debemos encontrar una primitiva de la función $f(t)$ y luego hacer un cambio de variable t a x.

El **teorema fundamental del cálculo (TFC)** nos da una relación entre las funciones de acumulación y las derivadas.

El TFC dice que si f(t) es continua y definimos:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \text{ entonces: } F'(c) = \left(\int_a^c f(t)dt\right)' = f(c).$$

El teorema fundamental del cálculo es el elemento básico para saber que la derivada y la integral definida son operaciones inversas una de la otra.

Ejemplo

Consideremos la función: $F(x)=\int_0^x t^2+1dt$.

En este caso, $\frac{1}{3}t^3+t$ es una primitiva de la función t^2+1. Así, tenemos:

$$F(x)=\int_0^x t^2+1dt=\tfrac{1}{3}x^3+x.$$

El área bajo la curva de 0 a 5 es $F(5)=\frac{1}{3}(125)+5$. Además: $F'(x)=x^2+1$.

Actividad de aprendizaje 5

Realiza lo que se solicita.

1. Calcula en tu cuaderno las funciones de acumulación de las funciones de la tabla. Posteriormente, determina el área bajo la curva de 0 a 3, a 5 y a 10. Recuerda efectuar todas las cuentas y justificar tus ideas.

   a. $f(t)=-0.5$ ______________
   b. $f(t)=3t+4$ ______________
   c. $f(t)=-\cos(t)$ ______________
   d. $f(t)=\text{sen}(t)+1$ ______________
   e. $f(t)=0$ ______________
   f. $f(t)=t^3+t$ ______________
   g. $f(t)=(1+2t)^3$ ______________
   h. $f(t)=3t^2+3t-5$ ______________
   i. $f(t)=\cos^2(t)+\text{sen}^2(t)$ ______________

2. Calcula las derivadas. Recuerda escribir todas las operaciones necesarias.

   a. Si $F(x)=\int_0^x t\,dt$, entonces $F'(5)=$

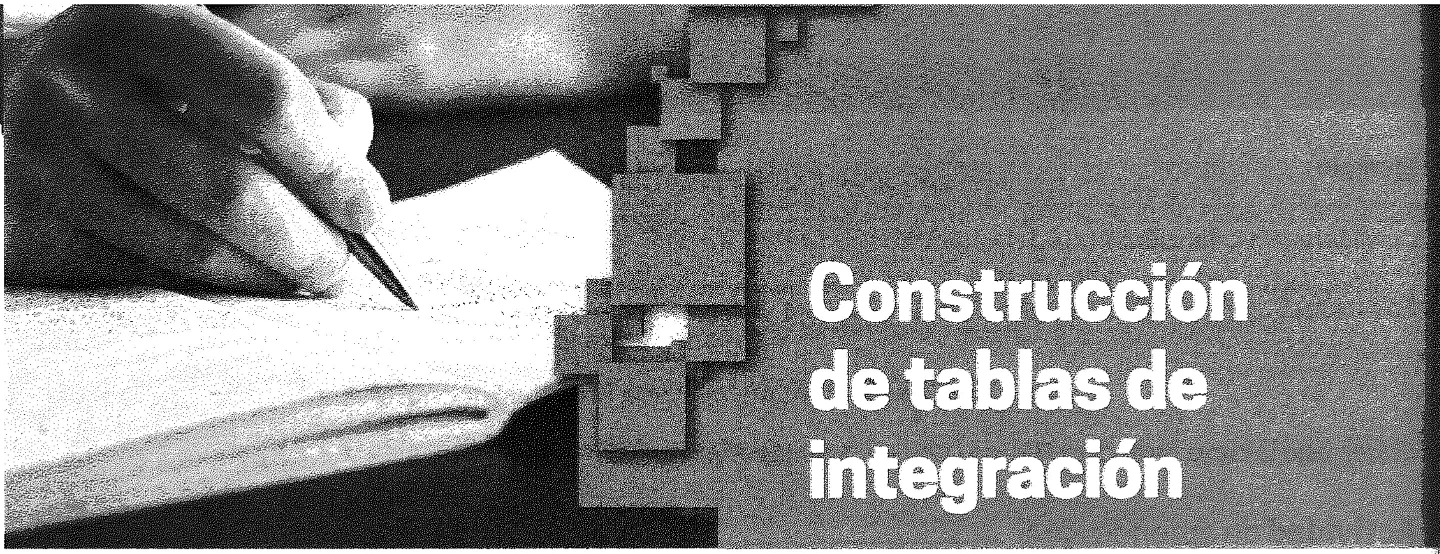
   b. Si $F(x)=\int_0^x \cos(t)dt$, entonces $F'\left(\frac{\pi}{2}\right)=$

   c. Si $F(x)=\int_0^x [-t+2\text{sen}(t)]dt$, entonces $F'(0)=$

   d. Si $F(x)=\int_0^x [t^3-4]dt$, entonces $F'(x)=$

   e. Si $F(x)=\int_0^x [t^3-t\cos(t)]dt$, entonces $F'(x)=$

   f. Si $F(x)=\int_0^x \frac{2\cos(t)-\pi}{\ln(t)}dt$, entonces $F'(x)=$



Construcción de tablas de integración

¿Reconoces patrones básicos?

En esta sección comenzaremos a construir tablas de integración que te servirán para determinar integrales cada vez más complicadas. Las tablas que construiremos te serán muy útiles cuando veas los métodos de integración.

En este momento, la única manera que tienes para determinar una primitiva de una función es tu memoria y tu intuición para hallar patrones, por esto, en la sección veremos diferentes ejercicios para refinar tu habilidad de reconocer patrones.

En matemáticas, uno de los sitios donde nacen de manera natural los patrones es cuando estudiamos sucesiones de números. Por ejemplo, la sucesión de Fibonacci es:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55\ldots$$

¿Notas algún patrón? Escribe tus ideas en las líneas.

Esta sucesión, aunque ya era conocida por antiguas culturas, es atribuida a Fibonacci y es la solución a un problema de crías de conejo:

"Cierto hombre tenía una pareja de conejos en un lugar cerrado y deseaba saber cuántos se podrían reproducir en un año a partir de la pareja inicial, teniendo en cuenta que de forma natural tienen una pareja en un mes, y que a partir del segundo se empiezan a reproducir."

La figura 2.3 muestra el aumento de conejos.

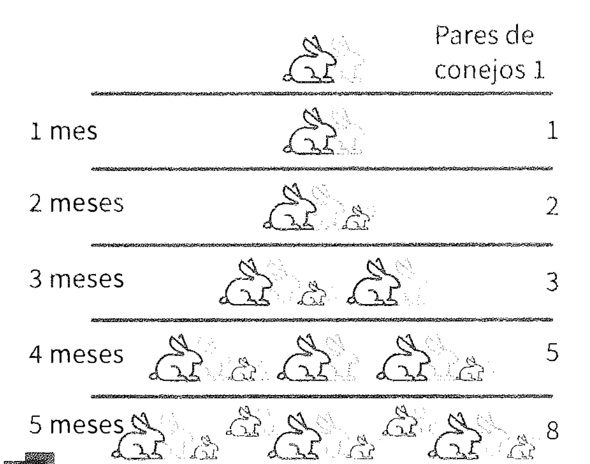


Figura 2.3

La sucesión de Fibonacci siempre inicia con uno y uno, posteriormente cualquier elemento es la suma de sus dos predecesores.

Como puedes ver, aún en problemas tan inocentes como la cría de conejos, tener una buena intuición de los patrones matemáticos puede ser de gran utilidad.

Veamos otro problema de sucesiones. Observa la sucesión de las derivadas de la función sen(x), esto es, enlistemos las derivadas de la función seno y el primer elemento de la lista será la función inicial:

$$\text{sen}(x), \cos(x), -\text{sen}(x), -\cos(x), \text{sen}(x), \ldots$$

¿Cómo crees que continúe la serie? Escribe en el espacio tus ideas.

En este caso, la sucesión sigue un patrón determinado por su derivada y, por simple observación, uno puede decir cuándo va seno o coseno y si lleva signo negativo o no.

A veces vas a tener que fijarte en la relación de los números que aparecen para determinar una integral, para ello pongamos un ejemplo de relación:

Número	Le asociamos	Número	Le asociamos
-4	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{2}$
-3	$-\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{3}$
-2	$-\frac{1}{1}$	3	$\frac{1}{4}$

¿Qué observas en este caso? Anota todas tus ideas en el espacio.

Presta mucha atención a la tabla previa y discútela con tus compañeros, te será de gran utilidad en la siguiente lección.

Para finalizar, te invitamos a que consultes el código QR del lado derecho, hay un problema de patrones matemáticos que podría serte útil.

TIC

¿Cuántas personas puedes sentar juntando cada vez más mesas?

El video muestra los patrones que genera este problema.

bkmrt.com/meT8Gp

Actividad de aprendizaje 6

Realiza lo que se solicita.

1. Calcula los siguientes cinco términos de cada una de las sucesiones:
   a. 1, 2, 3, 4, 5, …

   b. 1, 2, 3, 5, 8, …

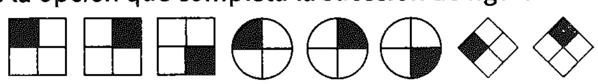
   c. 1, 2, −1, 3, −4, …

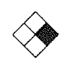
   d. 1, 2, 4, 8, 16, …

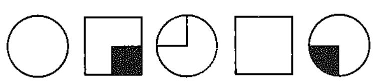
   e. 0.001, 0.00002, 0.0000003, 0.000000004, 0.00000000005, …

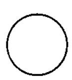
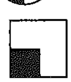
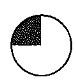
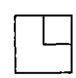
2. En tu cuaderno, escribe una manera de determinar cualquier elemento de cada una de las sucesiones anteriores. Recuerda escribir y justificar todas tus ideas.

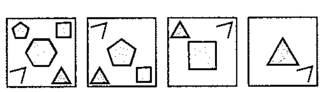
Elige la opción que completa la sucesión de figuras.

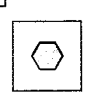
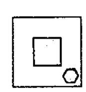
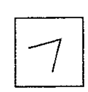
1.  ¿?

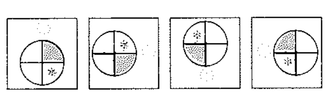
   a.  b.  c.  d. 

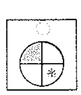
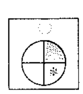
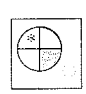
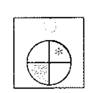
2.  ¿?

   e.  f.  g.  h. 

3.  ¿?

   a.  b.  c.  d. 

4.  ¿?

   a.  b.  c.  d. 

Integral de las funciones polinomiales

Ahora estudiemos las integrales de funciones polinomiales, es decir, funciones de la forma:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

donde n es un natural y los coeficientes $a_n, \ldots, a_1, a_0$ son números reales.

Observa que, por las propiedades de la integral, tenemos que:

$$\int f(x)dx = \int a_n x^n dx + \int a_{n-1} x^{n-1} dx + \ldots + \int a_1 x\, dx + \int a_0\, dx,$$

y además:

$$\int a_i x^i dx = a_i \int x^i dx$$

para todo i entre 0 y n, por lo tanto basta con estudiar la función $f(x) = x^n$.

Para encontrar una primitiva de la función $f(x)$ recordemos los patrones que vimos de las funciones monomiales de grado a lo más tres.

Función	$f(x) = 1$	$f(x) = x$	$f(x) = x^2$	$f(x) = x^3$
Primitiva	$F(x) = x$	$F(x) = \frac{1}{2} x^2$	$F(x) = \frac{1}{3} x^3$	$F(x) = \frac{1}{4} x^4$

¿Notas algún patrón? Observa detenidamente el exponente de la función $f(x)$ y la fracción que aparece en la función $F(x)$, después ve la fracción y el exponente de la función $F(x)$.

Anota en el espacio todas tus ideas.

Nota que en la tabla anterior, para encontrar una primitiva de la función $f(x) = x^n$ simplemente escribimos la fracción $\frac{1}{1+n}$ y el monomio x^{n+1}, así:

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c.$$

Combinando esto con las propiedades de la integral indefinida, tenemos que para la función:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

Su integral indefinida es:

$$\int f(x)dx = \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n}x^n + \ldots + \frac{a_1}{2}x^2 + a_0x + c.$$

En resumen, para calcular la integral de una función polinomial debes:

- Tratar con cada monomio por separado.
- Dejar iguales a los coeficientes.
- Añadir una fracción de acuerdo con el exponente.
- Sumar uno a todos los exponentes de la variable.
- Sumar una constante al final.

Por ejemplo, considera la función dada por:

$$f(x) = -5x^8 + 6x^5 + \frac{8}{3}x^3 + x^2 - x.$$

Determinemos su integral, para esto, usando las propiedades de la integral y la fórmula que obtuvimos para cada monomio (o bien la serie de pasos que describimos) tenemos que:

$$\int f(x)dx = -\frac{5}{9}x^9 + x^6 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + c.$$

Ahora consideremos la función dada por:

$$f(x) = x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1.$$

Determinemos su integral, para esto, usando las propiedades de la integral y la fórmula que obtuvimos para cada monomio (o bien la serie de pasos que describimos) tenemos que:

$$\int f(x)dx = \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + x + c.$$

Actividad de aprendizaje 7

Realiza lo que se pide.

1. En tu cuaderno, calcula cada una de las integrales indefinidas. Recuerda que la diferencial indica sobre cuál variable se trabaja, considerando así las otras literales como constantes.

a. $\int\left(\frac{x^3}{5} - x + 1\right)dx$

b. $\int(-x+3)^4\,dx$

c. $\int\left(-\frac{x^7}{\pi} + ex^4 + 2x + \frac{1}{2}\right)dx$

d. $\int\left[x^3 - x\left(1+x^2\right)\right]dx$

e. $\int\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^{2}+2x-4\right]dx$

f. $\int\frac{\frac{-x^{9}}{5}-11x^{4}-14x^{12}+7}{\pi^{2}+4}dx$

g. $\int\left(x\cos(y)+4\right)dx$

h. $\int(t+3)^{8}dt$

i. $\int\frac{12x^{4}-\left(x+\frac{1}{\pi}\right)^{3}}{4t+2}dx$

j. $\int\left(t^{4}\sqrt{\frac{x^{3}}{5}}-x+1-t^{14}+t\right)dt$

k. $\int\left(x^{3}t+yt^{4}+tyx\right)dx$

l. $\int\left((x+3)^{3}-\pi\right)^{2}dx$

2. ¿La integral indefinida de una función polinomial es una función polinomial nuevamente? Justifica tus ideas.

____

____

3. Al integrar una función se obtiene una nueva función, así que tiene sentido volver a integral, por ejemplo $\int\left(\int dx\right)dx=\int x+c_{0}\,dx=\frac{1}{2}x^{2}+c_{0}x+c_{1}$.
Calcula en tu cuaderno la doble integral de las funciones polinomiales, pero ten cuidado con los paréntesis.

a. $\int\left(\int-\frac{x^{2}}{10}-\frac{x+1}{7}dx\right)dx$

b. $\int\left(\int(-x+3)^{4}dx\right)dx$

c. $\int\left(\int-\frac{x^{7}}{\pi}+ex^{4}+2x+\frac{1}{2}dx\right)+x\,dx$

d. $\int\left(\int(t+10)^{10}dx\right)dx$

e. $\int\left(\int\left(x-\frac{1}{2}\right)^{2}+2x-4dx\right)dx$

f. $\int\left(\int(x-3)^{3}dx\right)+x\,dx$

Integral de las funciones trigonométricas y sus inversas

Determinar las integrales de funciones trigonométricas puede ser una tarea ardua, no es imposible, pero sí requiere mayor trabajo. Primero estudiaremos el caso de las funciones seno y coseno, luego daremos la fórmula precisa para otras funciones trigonométricas.

Consideremos la función seno, es decir, la función dada por:

$$f(x) = \text{sen}(x).$$

¿Se te ocurre alguna idea de cómo determinar una primitiva de esta función?

La manera más sencilla es recordar la sucesión de las derivadas de la primera lectura de esta sección, es decir:

$$\text{sen}(x), \cos(x), -\text{sen}(x), -\cos(x), \text{sen}(x), \ldots$$

Recuerda que una función $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, si la derivada de $F(x)$ es igual a la función $f(x)$, es decir, $F'(x) = f(x)$.

Con esto en mente, vemos en la sucesión, que la derivada de $-\cos(x)$ es $\text{sen}(x)$, por lo tanto, $-\cos(x)$ es una primitiva de la función seno, por lo que:

$$\int f(x)dx = \int \text{sen}(x)dx = -\cos(x) + c.$$

Consideremos la función coseno, es decir, la función dada por:

$$f(x) = \cos(x).$$

Para determinar su derivada, consideremos la lista de derivadas de la función coseno:

$$\cos(x), -\text{sen}(x), -\cos(x), \text{sen}(x), \cos(x), \ldots$$

Con esto en mente, observemos en la sucesión que la derivada de $\text{sen}(x)$ es $\cos(x)$, por lo tanto, $\text{sen}(x)$ es una primitiva de la función coseno y así:

$$\int f(x)dx = \int \cos(x)dx = \text{sen}(x) + c.$$

Veamos dos ejemplos.

Primero consideremos la función dada por:

$$f(x) = -\tfrac{8}{9}\cos(x).$$

Usando las propiedades de la integral indefinida y el valor de la integral del coseno tenemos que:

$$\int f(x)dx = -\frac{8}{9}\int \cos(x)dx = -\frac{8}{9}\text{sen}(x) + c.$$

Ahora consideremos la función dada por:

$$f(x) = \cos(x) - \text{sen}(x) + x^3 + x - 0.5.$$

En este caso, la función f no es trigonométrica ni polinomial.

A pesar de no ser polinomial, debido a las propiedades de la integral indefinida, sabemos que para determinar su integral sólo debemos ocuparnos de cada uno de los sumandos que aparecen, así:

$$\int f(x)dx = \int \cos(x)dx - \int \text{sen}(x)dx + \int x^3 dx + \int x\,dx - \int 0.5dx$$
$$= \text{sen}(x) + \cos(x) + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - 0.5x + c.$$

Nota que usando con cuidado las propiedades de la integral indefinida y las integrales que añadas a tu repertorio puedes calcular ejemplos más complicados.

A continuación, te damos una tabla de integrales trigonométricas.

Integrales trigonométricas	
$\int x\text{sen}(x)dx = \text{sen}(x) - x\cos(x)$	$\int x\cos(x)dx = \cos(x) + x\,\text{sen}(x)$
$\int \csc(x)dx = \ln\left\|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right\|$	$\int \sec(x)dx = \ln\left\|\sec(x) + \tan(x)\right\| + c$
$\int \tan(x)dx = -\ln\left\|\cos(x)\right\|$	$\int \cot(x)dx = -\ln\left\|\text{sen}(x)\right\|$
$\int \text{arcsen}(x)dx = x\,\text{arcsen}(x) + \sqrt{1-x^2}$	$\int \arccos(x)dx = x\arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$
$\int \text{sen}^n(x)dx = -\frac{\text{sen}^{n-1}(x)\cos(x)}{n} + \frac{n-1}{n}\int \text{sen}^{n-2}(x)dx$	
$\int \cos^n(x)dx = \frac{\cos^{n-1}(x)\text{sen}(x)}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}(x)dx$	

Por ahora, resulta complicado efectuar la comprobación de las integrales, sin embargo, al final del curso podrás verificarlas con los temas que abordaremos.

Actividad de aprendizaje 8

- **Realiza lo que se pide.**

1. En tu cuaderno, calcula cada una de las integrales indefinidas.

a. $\int \text{sen}^3(x) + 12dx$

b. $\int \csc(x) + \text{sen}(x)dx$

c. $\int \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}dx$

d. $\int x\,\text{sen}(x) + \cos^2(x)dx$

e. $\int x(\text{sen}(x) + \cos(x))dx$

f. $\int \frac{\text{sen}(x) + x^3 + \tan(x)}{\pi^2 + 4}dx$

g. $\int y\cos(x)+4dx$

h. $\int \frac{x\cos(x)\tan(x)}{\pi^e}dx$

i. $\int \operatorname{arcsen}(x)+\operatorname{sen}(x)dx$

j. $\int \arccos(\cos(x))\operatorname{sen}(x)dx$

k. $\int \cos^3(t)+y\operatorname{arcsen}(x)+x^3dx$

$\int\left(\left(\cos(x)+2\right)^3-\pi\right)^2 dx$

2. ¿La integral indefinida de una función trigonométrica es una función trigonométrica nuevamente? Justifica tus ideas y presenta ejemplos o contraejemplos al respecto.

---

3. Calcula en tu cuaderno la doble integral de las funciones polinomiales, cuida los paréntesis.

a. $\int\left(\int \operatorname{sen}(x)dx\right)dx$

b. $\int\left(\int x\operatorname{sen}(x)dx\right)dx$

c. $\int\left(\int -\frac{x^7}{\pi}+\operatorname{sen}(x)dx\right)+\cos(x)dx$

d. $\int\left(\int\left(\operatorname{sen}^2(x)+\cos^2(x)\right)^{10}dx\right)^{10}dx$

e. $\int\left(\int\left(\operatorname{sen}(x)-\frac{1}{2}\right)^2dx\right)+\frac{sen(x)\cos(x)}{2}dx$

f. $\int\left(\int x\cos(x)dx\right)+x\operatorname{sen}(x)dx$

Integral de la exponencial y del logaritmo

Deducir las fórmulas para las funciones logarítmicas y exponenciales es un poco más complicado, obtendremos las fórmulas más sencillas y luego daremos una tabla con las integrales más usuales.

Consideremos la función exponencial, es decir, la función dada por:

$$f(x) = e^x.$$

¿Se te ocurre alguna idea de cómo determinar una primitiva de esta función? La manera más sencilla es recordar la sucesión de las derivadas de la primera lectura de esta unidad, es decir:

$$e^x, e^x, e^x, \ldots$$

Recuerda que una función $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ si la derivada de $F(x)$ es igual a la función $f(x)$, es decir, $F'(x) = f(x)$.

Con esto en mente, observa en la sucesión que la derivada de e^x es e^x, por lo tanto, e^x es una primitiva de la función exponencial, y así:

$$\int f(x)dx = \int e^x\,dx = e^x + c.$$

Para el caso de la función logaritmo natural es un poco más complicado y es necesario usar las propiedades de la integral indefinida.

En este caso, recuerda que si $f^{-1}(x)$ es la función inversa de $f(x)$ y $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, entonces:

$$\int f^{-1}(x)dx = xf^{-1}(x) - F\left(f^{-1}(x)\right) + c.$$

En nuestro caso:

$$f(x) = e^x,\ f^{-1}(x) = \ln(x),\ F(x) = e^x.$$

Por lo tanto:

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - x + c.$$

Ejemplos

1. Consideremos la función $f(x) = e^x + \ln(x)$.

   Sabemos que para determinar la integral de la función $f(x)$ debemos calcular la integral de cada uno de los sumandos, por lo tanto:

   $$\int f(x)dx = \int e^x\,dx + \int \ln x\,dx = e^x + x\ln x - x + c.$$

2. Consideremos la función $f(x) = -e^x + \cos(x) + x^2$.

   Sabemos que para determinar la integral de la función $f(x)$ debemos calcular la integral de cada uno de los sumandos, por lo tanto:

   $$\int f(x)dx = -\int e^x\,dx + \int \cos(x)dx + \int x^2\,dx = -e^x - \operatorname{sen}(x) + \frac{1}{3}x^3 + c.$$

   Observa que usando con cuidado las propiedades de la integral indefinida y las integrales que añadas a tu repertorio puedes calcular ejemplos más complicados.

   Como con el caso de las trigonométricas, sabrás desarrollar, al final del curso, las equivalencias correspondientes de las fórmulas que se dan en la siguiente página. En el caso de los logaritmos deberás tener cuidado con la base.

A continuación, damos una tabla de integrales exponenciales y logarítmicas.

Tabla de integrales exponenciales y logarítmicas	
$\int e^{ax}\,dx=\frac{e^{ax}}{a}+c$	$\int e^{x}\operatorname{sen}(x)dx=\frac{e^{x}}{2}\left(\operatorname{sen}(x)-\cos(x)\right)+c$
$\int x^{n}e^{x}\,dx=x^{n}e^{x}-n\int x^{n-1}e^{x}\,dx+c$	$\int e^{x}\cos(x)dx=\frac{e^{x}}{2}\left(\operatorname{sen}(x)+\cos(x)\right)+c$
$\int \frac{dx}{x\ln x}=\ln\lvert\ln x\rvert+c$	$\int \operatorname{sen}(\ln x)dx=\frac{x}{2}\left(\operatorname{sen}(\ln x)-\cos(\ln x)\right)+c$
$\int(\ln x)^{n}dx=x(\ln x)^{n}-n\int(\ln x)^{n-1}dx+c$ para $n\neq 1$	$\int \cos(\ln x)dx=\frac{x}{2}\left(\operatorname{sen}(\ln x)+\cos(\ln x)\right)+c$
$\int x^{n}\ln(x)dx=x^{n+1}\left(\frac{\ln x}{n+1}-\frac{1}{(n+1)^{2}}\right)+c$ para $n\neq 1$	$\int \frac{\ln x}{x^{n}}dx=-\frac{\ln x}{(n-1)x^{n-1}}-\frac{1}{(n-1)^{2}x^{n-1}}+c$

Actividad de aprendizaje 9

Productos esperados

Realiza lo que se pide.

1. En tu cuaderno, calcula cada una de las integrales indefinidas.

$\int e^{x}+\ln x\,dx$

$\int e^{x}\left(x+\operatorname{sen}(x)\right)dx$

$\int\left(x+e^{x}\right)^{2}dx$

$\int e^{x}\left(\tan(x)\cos(x)+\operatorname{sen}(x)\right)dx$

$\int\frac{\ln x}{3}\left((x+3)^{3}-27x\right)dx$

$\int\frac{\tan(x)}{\pi^{e}}+\frac{2}{x\ln x}dx$

$\int\cos^{2}(\ln x)+\operatorname{sen}^{2}(\ln x)dx$

$\int(\ln x-5)^{5}dx$

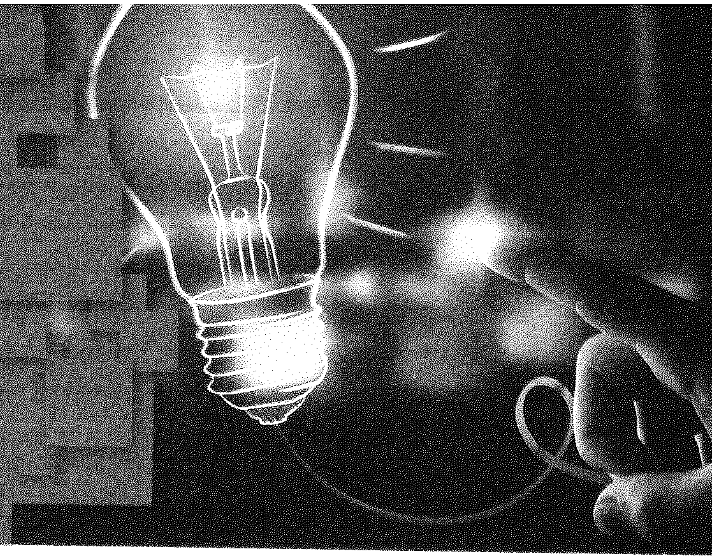
$\int\operatorname{sen}(\ln x)+\cos(\ln x)dx$

$\int e^{\ln x}+x\ln x\,dx$

$\int e^{x}+x^{2}\ln x\,dx$

$\int x^{2}e^{\pi x}+e^{x}\left(\cos(x)+x^{2}\right)dx$

2. ¿La integral indefinida de una función exponencial o logarítmica es una función exponencial o logarítmica nuevamente? Justifica tus ideas y di en qué casos sí y en cuáles no.
3. En este momento tienes diferentes tablas de integrales distribuidas a lo largo de tu libro. Reúne todas las tablas de integrales, debes añadir:
   - Integrales de funciones del tipo $f(x)=x^{\frac{n}{m}}$ y $f(x)=x^{-\frac{n}{m}}$. Usa colores para señalar patrones en las fórmulas.
   - Tus observaciones y patrones que te sirven para identificar las integrales.



Técnicas para obtener la antiderivada

Cambio de variable

En el tema anterior construimos tablas de integración de diferentes tipos de funciones, ahora estudiaremos diferentes métodos que combinados con las tablas del tema anterior te permitirán resolver una gran cantidad de problemas.

Para iniciar, veremos el cambio de variable o método de sustitución.

Este método proviene de la regla de la cadena de tu curso de Cálculo diferencial, recuerda que si tienes dos funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, entonces:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x).$$

Si integramos la igualdad previa y usando el teorema fundamental del cálculo, tenemos que:

$$f\big(g(x)\big)+c=\int\Big(f\big(g(x)\big)\Big)'dx=\int f'\big(g(x)\big)g'(x)dx$$

La integración por partes se origina comparando el extremo izquierdo y el derecho de la expresión anterior. En este caso, el método dice que cuando tenemos una función que se expresa como un producto de una composición y una derivada (lado derecho), entonces su integral sólo involucra una composición (lado izquierdo).

Ejemplos

1. Consideremos la función $f(x) = 3\cos(3x)$.

   En este caso:

$$\int f(x)dx=\int 3\cos(3x)dx=\int sen(3x)=\frac{-\cos(3x)}{3}+c.$$

   Observa el código de colores. La principal dificultad del método de integración por sustitución es que se debe desarrollar suficiente experiencia para identificar qué parte corresponde a la función $g(x)$ y qué parte corresponde a la función $f(x)$.

2. Consideremos la función $f(x) = e^{-7x+5}$.

Vamos a denotar por:

$$r(x) = e^x, \qquad r'(x) = e^x$$
$$s(x) = -7x+5, \quad s'(x) = -7$$

Así: $\int f(x)dx = \int e^{-7x+5}dx = \int r(s(x))dx$.

¿Qué falta para usar el cambio de variable?

El término que falta es la derivada de la función $s(x)$. Podemos añadirlo así:

$$\int f(x)dx = \int e^{-7x+5}dx = \int r(s(x))\cdot 1dx = \int r(s(x))\frac{-7}{-7}dx$$
$$= -\frac{1}{7}\int r(s(x))s'(x)dx = -\frac{1}{7}r(s(x)) + c = -\frac{1}{7}e^{-7x+5} + c.$$

3. Considera la función $f(x) = (2x + 8)$

Para calcular la integral, podríamos expandir el binomio y resolver la integral monomio a monomio, pero en lugar de eso, resolvamos usando un cambio de variables.

Para ello, definimos: $u = 2x + 8$ y así, derivando, tenemos que $du = 2dx$. Por consiguiente:

$$\int f(x)dx = \int (2x+8)^3 dx = \int u^3 \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}u^4 + c = \frac{1}{8}(2x+8)^4 + c.$$

Lo que hicimos fue despejar el valor de dx y poner la integral en términos de u y de du.

Al final, los tres ejemplos que vimos son diferentes presentaciones del mismo método y debes identificar cuándo usarlo.

En resumen, para usar el método de sustitución en la integral $\int f'(u(x))u'(x)dx$ tenemos estos pasos:

1. Se hace el cambio de variable.

$$t = u(x), \quad dt = u'(x)dx.$$

2. Despejamos u y dx en la integral.

$$\int f'(u(x))u'(x)dx = \int f'(t)dt.$$

3. Si la integral es más sencilla, la resolvemos .

$$\int f'(u(x))u'(x)dx = \int f'(t)dt = f(t) + c.$$

4. Volvemos a la variable inicial.

$$\int f'(u(x))u'(x)dx = \int f'(t)dt = f(t) + c = f(u(x)) + c.$$

Ten cuidado, estos pasos no son una regla estricta y en general vas a necesitar hacer muchos ejercicios para tener suficiente práctica.

Actividad de aprendizaje 10

Realiza lo que se pide.

1. Resuelve las integrales en tu cuaderno usando, el método de cambio de variable. Recuerda poner todos los pasos y justificar el desarrollo.

a. $\int(6x+7)^5dx$

b. $\int\left(-87x+\frac{43}{e}\right)^{105}dx$

c. $\int(x^2-2x+6)^5(2x-2)dx$

d. $\int\left(-87x+\frac{43}{e}\right)^{105}dx$

e. $\int\sqrt{5x-3}dx$

f. $\int\frac{5}{(3x-4)^2}dx$

g. $\int\frac{8x}{(2x^2+5)^4}dx$

h. $\int\frac{(\sqrt{x}-b)^2}{\sqrt{x}}dx$

i. $\int\frac{1}{at+b}dt$

j. $\int\frac{t}{3t^2-4}dt$

k. $\int\frac{1}{x+3}dx$

l. $\int e^{3x}(1-e^{3x})^2dx$

m. $\int\frac{2x-3}{(x^2-3x+6)^2}dx$

n. $\int\frac{(4-\ln(x+3))^3}{x+3}dx$

o. $\int\frac{-e^{-t}}{1+e^t}dt$

p. $\int\frac{-9\operatorname{sen}(3x)}{\sqrt[3]{1+3\cos(3x)}}dx$

q. $\int\frac{1}{x+\sqrt{x}}dx$

r. $\int e^{x+e^x}dx$

s. $\int\frac{e^{2x}}{2+e^x}dx$

t. $\int\frac{5e^{2x}-e^x}{e^{2x}-1}dx$

u. $\int\frac{e^x}{e^{2x}+e^x+x}dx$

v. $\int x\sqrt{1-x}\,dx$

2. ¿Surgió algún patrón o idea después de resolver las integrales? Anota tus conclusiones.

Integración por partes

La integración por partes también se origina por una propiedad del cálculo diferencial, para ello, si tenemos dos funciones diferenciables $f(x)$ y $g(x)$, entonces:

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Integrando la igualdad anterior y usando el teorema fundamental del cálculo, tenemos:

$$f(x)g(x)+c=\int (f(x)g(x))'dx=\int f'(x)g(x)dx+\int f(x)g'(x)dx.$$

De esta manera, la integración por partes se expresa por la fórmula:

$$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx+c.$$

En este caso, observa que para usar el método de integración por partes, deben aparecer dos factores y uno de ellos debe ser fácil de integrar.

Ejemplos

1. Consideremos la función $h(x) = x\,\text{sen}(x)$.

   Vamos a denotar por:

$$f(x)=x,\quad f'(x)=1,$$
$$g(x)=-\cos(x),\quad g'(x)=\text{sen}(x).$$

   Por lo tanto, usando la fórmula de integración por partes, tenemos que:

$$\int x\text{sen}(x)dx=\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx+c$$
$$=-x\cos(x)-\int -\cos(x)dx+c=-x\cos(x)+\text{sen}(x)+c.$$

   Al igual que el método por sustitución, el método por partes requiere práctica y que aprendas a identificar patrones.

   Por ejemplo, observa qué hubiera pasado si intercambiamos el papel de la función $f(x)$ y $g(x)$, es decir, consideremos:

$$g(x)=0.5x^2,\quad g'(x)=x,$$
$$f(x)=\text{sen}(x),\quad f'(x)=\cos(x).$$

   Por lo tanto, usando la fórmula de integración por partes tenemos que:

$$\int x\text{sen}(x)dx=\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx+c$$
$$=0.5x^2\text{sen}(x)-\int 0.5x^2\cos(x)dx+c.$$

En el caso previo, la expresión empeoró, ya que ahora tenemos un término cuadrático en x que no tenía.

Por lo tanto, para usar de manera correcta el método por partes, debemos buscar que las expresiones se simplifiquen y que los exponentes bajen de grado.

Tendrás que hacer varios ejercicios para adquirir habilidad con estos métodos de integración y resolverlos de mejor manera.

2. Consideremos la función $h(x) = xe^x$.

   En este caso, vamos a denotar por:

$$f(x) = x, \quad f'(x) = 1,$$
$$g(x) = e^x, \quad g'(x) = e^x.$$

   Por lo tanto, usando la fórmula de integración por partes, tenemos que:

$$\int xe^x\,dx = \int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx + c$$
$$= xe^x - \int e^x\,dx + c = xe^x + e^x + c.$$

3. Consideremos la función: $h(x) = x^2 \ln x$.

   En este caso, vamos a denotar por:

$$f(x) = \ln x, \quad f'(x) = \frac{1}{x},$$
$$g(x) = \frac{1}{3}x^3, \quad g'(x) = x^2.$$

   Por lo tanto, usando la fórmula de integración por partes, tenemos que:

$$\int x^2 \ln x\,dx = \int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx + c$$
$$= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{3}\int x^3 \frac{1}{x}dx + c$$
$$= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + c.$$

En este método no hay un procedimiento canónico, pero aquí hay algunos consejos que pueden ser útiles:

- Las funciones **polinomiales, logarítmicas y arcotangente**, se eligen como ***f***.
- Las funciones **exponenciales** y trigonométricas del tipo **seno y coseno**, se eligen como ***g'***.
- Si la expresión es **polinomial** siempre debes buscar **reducir el grado** de la expresión.

TIC

En el video se da un repaso de la integración por partes, practica para reconocer las regularidades de este método.

bkmrt.com/WOfXlu

Actividad de aprendizaje 11

Resuelve las integrales en tu cuaderno, usando el método de integración por partes. Recuerda poner todos los pasos y justificar el desarrollo.

1. $\int xe^{x}dx$
2. $\int -x\cos(x)dx$
3. $\int x^{2}\ln x dx$
4. $\int \sqrt{x}\ln x dx$
5. $\int x^{2}\cos(x)dx$
6. $\int \frac{x}{\cos^{2}(x)}dx$
7. $\int e^{x}(x^{2}-2x+1)dx$
8. $\int e^{-x}\operatorname{sen}(x)dx$
9. $\int e^{3x}\cos(5x)dx$
10. $\int (t^{2}+t)e^{r+2t}dt$
11. $\int \frac{\ln(\ln x)}{x}dx$
12. $\int 5^{x}x^{2}dx$
13. $\int \operatorname{sen}(\ln x)dx$
14. $\int \ln x\, dx$
15. $\int \frac{-x}{\operatorname{sen}^{2}(x)}+xe^{x}\,dx$
16. $\int \cos(x)\ln(\operatorname{sen}(x))dx$
17. $\int e^{-4x}(\operatorname{sen}(4x)+\cos(2x))dx$
18. $\int x\sqrt{x+1}\,dx$
19. $\int \frac{\ln x}{x^{3}}dx$
20. $\int \left(\frac{5}{2}t^{2}-t\right)e^{-1+2t}-\frac{\ln(\ln 5t)}{5t}dt$

Fracciones parciales

En esta sección consideraremos funciones racionales, es decir, funciones del tipo:

$$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)},$$

donde $p(x)$ y $q(x)$ son funciones polinomiales.

El método por fracciones parciales se origina del algoritmo de división de polinomios en una variable y busca escribir las funciones racionales como sumas de funciones más sencillas.

Si el grado de $p(x)$ es mayor o igual al grado de $q(x)$, entonces:

$$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}=s(x)+\frac{r(x)}{q(x)},$$

donde $s(x)$ y $r(x)$ son funciones polinomiales. Así:

$$\int f(x)dx=\int\frac{p(x)}{q(x)}dx=\int s(x)dx+\int\frac{r(x)}{q(x)}dx,$$

por lo tanto, siempre podemos asumir que el grado de $q(x)$ es mayor al de $r(x)$.

Esta es la razón de la importancia de resolver integrales cuyo integrando sea un cociente en el que el grado del denominador sea mayor que el del numerador.

A continuación, presentaremos algunos métodos que te ayudarán a resolver estas integrales.

Caso 1. Raíces simples.

En este caso, la función racional $f(x)$ puede escribirse de la forma:

$$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}+\ldots,$$

donde los coeficientes $A, B, C, \ldots,$ se deben determinar analizando la función polinomial $p(x)$. Así:

$$\begin{aligned}\int f(x)dx&=\int\frac{p(x)}{q(x)}dx=\int\frac{A}{x-a}dx+\int\frac{B}{x-b}dx+\int\frac{C}{x-c}dx+\ldots\\&=A\ln(x-a)+B\ln(x-b)+C\ln(x-c)+\ldots+c.\end{aligned}$$

Ejemplo

Considera la función $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$ y la identidad $x^2-1=(x-1)(x+1)$.

De lo anterior tenemos: $f(x)=\frac{1}{x^2-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+B(x-1)}{x^2+1}=\frac{x(A+B)+1(A-B)}{x^2+1}$.

La expresión anterior nos da los sistemas de ecuaciones $A+B=0$ y $A-B=1$, ya que el primer numerador debe ser igual al último numerador.

Este sistema tiene como soluciones $A=0.5$ y $B=-0.5$.

Por lo tanto:

$$\int f(x)\mathrm{dx}=\int\frac{0.5}{x-1}dx+\int\frac{-0.5}{x+1}dx=0.5\ln(x-1)-0.5\ln(x+1)+c.$$

Caso 2. Raíces múltiples.

En este caso, la función racional $f(x)$ puede escribirse de la forma:

$$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{A}{(x-a)^{n_1}}+\frac{B}{(x-b)^{n_2}}+\frac{C}{(x-c)^{n_3}}+\ldots,$$

donde los coeficientes A, B, C, ..., se deben determinar analizando la función polinomial $p(x)$ y los exponentes n_1, n_2, n_3, ... , son números naturales.

En este caso:

$$\int f(x)dx=\int\frac{p(x)}{q(x)}dx=\int\frac{A}{(x-a)^{n_1}}dx+\int\frac{B}{(x-b)^{n_2}}dx+\int\frac{C}{(x-c)^{n_3}}dx+\ldots$$

La solución de este tipo de integrales depende si los exponentes son mayores que uno.

Ejemplo

Considera la función $f(x)=\dfrac{x^2-x+2}{(x+1)(x-1)^2}$.

Por consiguiente:

$$f(x)=\frac{x^2-x+2}{(x+1)(x-1)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x-1)^2}=\frac{A(x-1)^2+B(x+1)}{(x+1)(x-1)^2}.$$

En este caso, los coeficientes son $A=1$ y $B=1$.

Por lo tanto:

$$\int f(x)dx=\int\frac{x^2-x+2}{(x+1)(x-1)^2}dx=\int\frac{1}{x+1}dx+\int\frac{1}{(x-1)^2}dx=\ln(x+1)+\int u^{-2}du$$

$$=\ln(x+1)-u^{-1}+c=\ln(x+1)-\frac{1}{(x-1)}+c,$$

donde $u=x-1$.

En este último caso, tuvimos que combinar el método de fracciones parciales y el método de sustitución para dar con el resultado y, en general, casi siempre tendrás que usar varios métodos.

Actividad de aprendizaje 12

- **Resuelve las integrales en tu cuaderno, usando el método de fracciones parciales. Recuerda poner todos los pasos y justificar el desarrollo.**

1. $\displaystyle\int\frac{7x+3}{x^2+3x-4}dx$
2. $\displaystyle\int\frac{2x+3}{x^2+x-2}dx$
3. $\displaystyle\int\frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}dx$

4. $\int \frac{5x^2-36x+48}{x(x-4)^2}dx$

5. $\int \frac{x^2-8x+15}{x^2-6x+5}dx$

6. $\int \frac{2x-7}{6x^2-5x+1}dx$

7. $\int \frac{2t^2-4t+1}{2t^3-t^2-2t+1}dt$

8. $\int \frac{3x^2+x-1}{x^2-5x+6}dx$

9. $\int \frac{5x-11}{2x^2-x-6}dx$

10. $\int \frac{3x^3-8x^2+10}{x(x-1)^3}dx$

11. $\int \frac{2t^3-t^2-t+3}{t(t-1)(2t+3)}dt$

12. $\int \frac{x-1}{x^3+3x^2+2x}dx$

13. $\int \frac{3}{x^2+3x}dx$

14. $\int \frac{3x+1}{x^2+4x+3}dx$

15. $\int \frac{5x-3}{(x+1)(x-3)}dx$

16. $\int \frac{6x+7}{(x+2)^2}dx$

17. $\int \frac{1}{x^2-1}dx$

18. $\int \frac{1}{x^4-1}dx$

Sustitución trigonométrica

El siguiente método se basa por completo en las identidades trigonométricas, ¿las recuerdas todas?

En la tabla presentamos algunas de las identidades trigonométricas principales.

$\operatorname{sen}^2(x)+\cos^2(x)=1$	$\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y$
$\tan^2(x)+1=\sec^2(x)$	$\operatorname{sen}(x\pm y)=\operatorname{sen}x\cos y\pm\cos x\operatorname{sen}y$
$\cot^2(x)+1=\csc^2(x)$	$\operatorname{sen}(2x)=2\operatorname{sen}x\cos x$
$\tan(2x)=\frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$	$\cos(2x)=\cos^2(x)-\operatorname{sen}^2(x)$

La sustitución trigonométrica usa las identidades trigonométricas y el método de sustitución para resolver las integrales del tipo:

$$\sqrt{a^2-u^2},\ \sqrt{a^2+u^2}\ \text{ y }\ \sqrt{u^2-a^2},$$

donde a es un número real.

Ejemplo

Considera la función $f(x)=\sqrt{9-4x^2}$. Aquí, f puede verse como un cateto en el triángulo rectángulo de hipotenusa 3. ¿Cómo colocarías estos valores?

Eligiendo el cambio de variable: $x=\frac{3}{2}\operatorname{sen}(u), dx=\frac{3}{2}\cos(u)du$, tenemos que:

$$\int f(x)dx=\int\sqrt{9-4x^2}\,dx=\int\sqrt{9-4\left(\frac{3}{2}\operatorname{sen}(u)\right)^2}\left(\frac{3}{2}\cos(u)du\right)$$

$$=\frac{9}{2}\int\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(u)}\cos(u)du=\frac{9}{2}\int\cos^2(u)du$$

$$=\frac{9}{2}\left(\frac{\cos(u)\operatorname{sen}(u)}{2}+\frac{1}{2}u+c\right)=x\sqrt{9-4x^2}+\frac{9}{4}\operatorname{arcsen}\left(\frac{2x}{3}\right)+c.$$

En este caso, la integral resultó ser más complicada que las ya estudiadas, pues fue necesario:

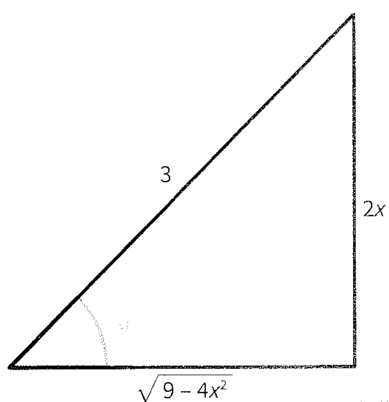


Figura 2.4

- Hacer el cambio de variable de x a u.
- Usar las identidades trigonométricas.
- Resolver la integral del coseno cuadrado (revisa tus tablas de integrales trigonométricas).
- Hacer el cambio de variable de u a x.

Para el último paso fue necesario considerar el triángulo rectángulo de la figura 2.4.

De esta imagen deducimos que:

$$\operatorname{sen}(u)=\frac{2x}{3},\quad \cos(u)=\frac{\sqrt{9-4x^2}}{3}.$$

Ejemplos

1. Consideremos la función $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

   Eligiendo el cambio de variable $x=\operatorname{sen}(u)$; $dx=\cos(u)du$, tenemos que:

$$\int f(x)dx=\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(u)}}(\cos(u)du)$$

$$=\int\frac{\cos(u)}{\cos(u)}du=\int du=u+c=\operatorname{arcsen}(x)+c.$$

2. Consideremos la función $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

   Elegimos el cambio de variable $x=\tan(u)$; así $dx=\sec^2(u)du$. Por lo anterior, tenemos que:

$$\int f(x)dx=\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(u)}}(\sec^2(u)du)$$

$$=\int\frac{\sec^2(u)}{\sec(u)}du=\int\sec(u)du=\ln|\sec(u)+\tan(u)|+c$$

$$=\ln|\sec(\arctan(x))+x|+c.$$

Una vez más fue necesario consultar las tablas de integrales trigonométricas; siempre que llegues a una expresión sencilla revisa tus tablas, seguramente ahí encontrarás la solución.

Como resumen, podemos decir lo siguiente.

- Si tenemos una expresión $\sqrt{x^2+n^2}$, realizamos el cambio de variable $x = n\tan(u)$.
- Si tenemos una expresión $\sqrt{x^2-n^2}$, realizamos el cambio de variable $x = n\sec(u)$.
- Si tenemos una expresión $\sqrt{n^2-x^2}$, realizamos el cambio de variable $x = n\,\text{sen}(u)$.

Actividad de aprendizaje 13

Resuelve las integrales en tu cuaderno, usando el método de sustitución trigonométrica. Recuerda poner todos los pasos y justificar el desarrollo.

1. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}dx$
2. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$
3. $\int \frac{1}{\left(x^2-2x+5\right)^2}dx$
4. $\int \frac{x}{\sqrt{5-(3-x)^2}}dx$
5. $\int \frac{1}{x^4\sqrt{x^2-1}}dx$
6. $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx$
7. $\int \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt$
8. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-2}}dx$
9. $\int x\sqrt{1-x^2}dx$
10. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}dx$
11. $\int \frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}dx$
12. $\int \frac{1}{\sqrt{\left(4-x^2\right)^3}}dx$
13. $\int \frac{x+1}{\sqrt{2x-x^2}}dx$
14. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-4x+13}}dx$
15. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-2x-8}}dx$
16. $\int \sqrt{12+4x-x^2}dx$
17. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx$
18. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx$

Potencias de funciones trigonométricas

Las últimas integrales que veremos son las potencias de funciones trigonométricas.

En este caso, ya tienes a la mano dos fórmulas: la integral para la n-ésima potencia del seno y la integral para la n-ésima potencia del coseno.

Las fórmulas son, respectivamente:

$$\int sen^n(x)dx = -\frac{sen^{n-1}(x)\cos(x)}{n} + \frac{n-1}{n}\int sen^{n-2}(x)dx.$$

$$\int \cos^n(x)dx = \frac{\cos^{n-1}(x)sen(x)}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}(x)dx.$$

Para iniciar, deduzcamos estas fórmulas para $n = 2$ y luego trabajaremos diferentes ejemplos para notar las diferencias de cuando n es par o impar.

Consideremos la función: $f(x) = \text{sen}^2(x)$.

Usando la identidad $\text{sen}^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$, tenemos que:

$$f(x) = \text{sen}^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}.$$

Por lo tanto:

$$\int f(x)dx = \int \text{sen}^2(x)dx = \int \frac{1-\cos(2x)}{2}dx = \int \frac{1}{2}dx - \int \frac{\cos(2x)}{2}dx = \frac{x}{2} - \frac{\text{sen}(2x)}{4} + c.$$

Nota que es de vital importancia recordar todas las identidades trigonométricas que puedas, te invitamos a que revises el material que creas que te hace falta.

Consideremos ahora la función $f(x) = \text{sen}^3(x)$.

Volveremos a usar la identidad $\text{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$ y el método de integración por sustitución. En este caso, la integral es:

$$\int f(x)\text{d}x = \int \text{sen}^3(x)dx = \int \text{sen}^2(x)\text{sen}(x)dx = \int \left(1-\cos^2(x)\right)\text{sen}(x)dx$$
$$= \int \text{sen}(x)dx - \int \cos^2(x)\text{sen}(x)dx = -\cos(x) - \int \cos^2(x)\text{sen}(x)dx.$$

Para resolver la última integral, hagamos el cambio de variable:

$$u = \cos(x);\; du = \text{sen}(x)dx.$$

Así, la integral se convierte en:

$$\int \cos^2(x)\text{sen}(x)dx = \int u^2\,du = \frac{1}{3}u^3 + c = \frac{1}{3}\cos^3(x) + c.$$

Por tanto, la integral original es:

$$\int f(x)\text{d}x = \int \text{sen}^3(x)dx = -\cos(x) - \int \cos^2(x)\text{sen}(x)dx = -\cos(x) - \frac{1}{3}\cos^3(x) + c.$$

Observa que es imposible aferrarte a un método, debes dominar todos los métodos y usarlos con toda la libertad y creatividad que puedas.

Consulta el enlace que muestra un problema más complejo, pero realizable, sobre integrales trigonométricas.

bkmrt.com/AvB3DJ

Ejemplos

Consideremos la función $f(x) = \operatorname{sen}^2(x)\cos^2(x)$.

Usaremos las identidades $\operatorname{sen}^2(x)=\dfrac{1-\cos(2x)}{2}$ y $\cos^2(x)=\dfrac{1+\cos(2x)}{2}$. En este caso, la integral es:

$$\int f(x)dx=\int \operatorname{sen}^2(x)\cos^2(x)dx=\int\left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)\left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{4}\int 1-\cos^2(2x)dx=\frac{1}{4}\left(x-\int\cos^2(2x)dx\right).$$

Para resolver la última integral, considera el cambio $u = 2x$ y $du = 2dx$, por lo tanto, la integral es:

$$\int\cos^2(2x)dx=\frac{1}{2}\int\cos^2(u)du=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}u+\frac{1}{4}\operatorname{sen}(2u)+c\right)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{4}\operatorname{sen}(4x)+c\right).$$

De esta manera, la integral con la cual iniciamos es:

$$\int f(x)dx=\int\operatorname{sen}^2(x)\cos^2(x)dx=\frac{1}{4}\left(x-\int\cos^2(2x)dx\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{8}\operatorname{sen}(4x)\right)+c.$$

En general, vas a tener que combinar todos los métodos e ideas que tengas para dar con el resultado adecuado. Con la suficiente práctica todo esto será más sencillo y podrás realizar las integrales de manera más ágil.

Actividad de aprendizaje 14

Productos esperados

Resuelve las integrales en tu cuaderno con el método de esta sección. Desarrolla todos los pasos y justifícalos. Recuerda consultar tus identidades trigonométricas.

1. $\int\operatorname{sen}^3(x)dx$
2. $\int\cos^3(4x)\operatorname{sen}(4x)dx$
3. $\int\operatorname{sen}^5(x)\cos^2(x)dx$
4. $\int\cos^4(x)dx$
5. $\int\operatorname{sen}^2(3x)\cos^2(3x)dx$
6. $\int\cot^3(x)dx$
7. $\int\sec^4(t)dt$
8. $\int\csc^3(x)dx$
9. $\int\tan^6(x)\sec^4(x)dx$
10. $\int\sec^3(x)dx$
11. $\int\tan^2(x)\sec^3(x)dx$
12. $\int\sin^6(t)\cos^2(t)dt$
13. $\int\operatorname{sen}^4(x)\cos(x)dx$
14. $\int\operatorname{sen}(3x)\cos(2x)dx$
15. $\int\cos(5x)\operatorname{sen}(2x)dx$
16. $\int\tan^3(x)\sec^4(x)dx$
17. $\int\tan^3(2t)\sec^3(2t)dt$
18. $\int 2\cot^3(x)\csc^5(x)dx$
19. $\int\dfrac{\operatorname{sen}^3(x)}{\cos(x)}dx$
20. $\int\left(\dfrac{\operatorname{sen}(t)}{\cos(t)}\right)^4dt$
21. $\int\operatorname{sen}(5t)\cos(3t)dt$

Entrena tus conocimientos

Responde los ejercicios, usando lo aprendido en este parcial.

1. En cada inciso, determina las primitivas de la función dada.

   $f(x) = 10x$ $\quad$ $g(x) = 9x^2$ $\quad$ $f(x) + g(x)$

   $g(x) - f(x)$ $\quad$ $h(x) = 27x^2$ $\quad$ $4f(x) + h(x)$

   $3g(x) - 5h(x)$ $\quad$ $2(f(x) - h(x))$ $\quad$ $-3(h(x) + 2g(x))$

2. Utiliza la propiedad de la función inversa para determinar la integral con los datos que se proporcionan, luego integra con las propiedades que conoces, ¿se obtuvo lo mismo?.

   $f^{-1}(x) = x$; $F(x) = 0.5x^2$. $\quad$ $f^{-1}(x) = 0.5(x - 5)$; $F(x) = x^2 + 5x$.

3. Obtén antiderivadas para las siguientes funciones.

   $f(t) = -6t$ $\quad$ $f(x) = 12x^2$ $\quad$ $f(y) = -16x^3$

   $f(t) = \cos t$ $\quad$ $f(x) = -2\text{sen}2t$ $\quad$ $f(y) = \sec y \tan y$

4. Determina la función de acumulación de $f(t)$ para las funciones solicitadas con los valores que se proporcionan. Grafica el resultado.

   $f(t) = 4$; $a = -5$ y $b = -3, 5, 9, 12, x$. $\quad$ $f(t) = 2x + 1$; $a = -0.5$ y $b = 0, 1, 2, x$.

   $f(t) = -6x + 2$; $a = 0.5$ y $b = 3, 6, 9, x$. $\quad$ $f(t) = 3x$; $a = 0$ y $b = 4, 8, 12, x$.

5. Continúa las sucesiones de derivadas, escribe los siguientes cinco términos y busca patrones a partir de ellas.

   x^{10}; $10x^9$; ________; ________; ________; ________; ________.

   $\cos(x)$; $-\text{sen}(x)$; ________; ________; ________; ________; ________.

   $\tan(x)$; $\sec^2(x)$; ________; ________; ________; ________; ________.

   $x - \ln|x+1|$; $\dfrac{x}{x+1}$; ________; ________; ________; ________; ________.

6. Calcula las integrales indefinidas.

   $$\int\left(-x^3 + 4x^3 + 3\right)^4 dx \qquad \int\left(\int (x+2)^2 dx\right) + x\,dx$$

   $$\int\left[\tan(x) + \cot(x)\right]dx \qquad \int e^{5x}(x^3 - 1)dx$$

   $$\int \frac{\text{sen}x}{\cos^2 x\sqrt{\sec x}}dx \qquad \int x^3 \text{sen}x\,dx$$

Suma anécdota

Poder expresar tus sentimientos de manera adecuada es una habilidad que te permitirá tener una vida emocional más sana, pero además puede influir en personas que te rodean y quizá, con un simple "gracias", hacerle el día a alguien.

En la historia moderna de la matemática ha habido varios casos de gente que reconoce el trabajo de sus colegas:

- Emmy Noether y Albert Einstein. Emmy Noether (23 de marzo de 1882 - 14 de abril de 1935) fue una matemática alemana y reconocida por contribuciones de fundamental importancia en los campos de la física y el álgebra. Fue considerada por David Hilbert y Albert Einstein como la mujer más importante en la historia de la matemática.

  Su vida fue un ejemplo de lucha y perseverancia, pues tuvo muchas dificultades personales y en su carrera académica. Sin embargo, siempre se esforzó en compartir con los demás sus conocimientos y sus recursos, fue una excelente maestra y sus estudiantes siempre le agradecieron la dedicación con que los trató.

- David Bradley Massey y Lê Dũng Tráng. David Massey (24 de agosto de 1959-) es un reconocido matemático estadounidense, autor de muchos libros de nivel básico y de importantes artículos de investigación. Massey, como gesto de admiración y reconocimiento a la gran carrera de Lê Dũng Tráng (1947-), inventó unos objetos matemáticos que reciben del nombre de los números de Lê.

Como puedes apreciar, llevar una relación sana con tus colegas, compañeros y gente que te rodea es muy importante, y reconocer sus logros y cómo han influido en ti, seguro que los hará sentirse importantes en tu vida.

Te invitamos a que expreses tus sentimientos y puedas agradecer por todas las personas que han contribuido para que estés en este momento aquí.

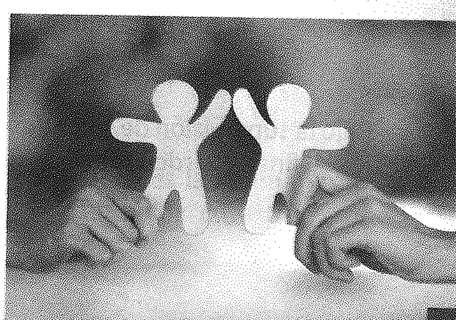


Figura 2.5

Piensa en algo positivo que haya hecho alguno de tus compañeros por ti y en cómo reconocerlo frente a los demás y contesta.

1. ¿Qué te gustaría que reconocieran en ti?

   ____

2. ¿Qué puedes hacer por aquellos compañeros que no conoces suficiente para decir algo positivo de ellos?

   ____

Proyecto integrador

Como has visto, la única manera de obtener las integrales indefinidas de ciertas funciones es recordando ejemplos previos y reconociendo integrales a simple vista.

En esta ocasión, vamos a construir un juego de memorama especial para integrales indefinidas.

En equipos formados por su profesor, construyan lo siguiente.

1. Por cada integral de las tablas de integración, elaboren dos fichas: una con la integral indefinida y otra con el resultado de la integración.
2. Aparte, elaboren fichas que tendrán un papel diferente en el juego, éstas serán de dos tipos:
   a. Fichas con cada teorema de integración.
   b. Fichas con cada método de integración.
3. Las reglas para jugar este memorama son las siguientes:
   a. Las fichas con las integrales se revuelven y se colocan boca abajo. Igual que en un juego de memorama clásico. Las fichas con los teoremas y métodos de integración se colocan aparte, boca arriba.
   b. El objetivo es voltear dos fichas que relacionen la integral indefinida con su resultado. Cuando alguien haya encontrado un par correcto, deberá señalar cuáles teoremas y métodos de integración fueron necesarios para obtener la igualdad, si es correcto suma un punto y se quitan las fichas de las integrales, si falla en la elección de los teoremas y métodos se regresan las fichas de las integrales boca abajo y no suma ningún punto.
   c. Gana quien junte más puntos.

Bajo la supervisión de su profesor, jueguen algunas partidas y practiquen sus integrales. Al final, guarden todas las fichas en su portafolio de evidencias.

Digital BM

Sismos y logaritmos

Como se vio en cursos anteriores, la función logaritmo suaviza las curvas. Esto lo aprovecha la escala de Richter para poder interpretar fenómenos potentes como sismos, cuya medición es difícil de realizar.

El área bajo la curva de la función para la escala de Richter, ofrece la energía liberada por el sismo, esta es una aplicación directa de la integral a fenómenos naturales.

¿Qué obtendríamos al calcular el área bajo la curva de una función de crecimiento poblacional?

Hacia la prueba Planea

Practica para tu participación en la prueba Planea con este examen.

1. Para las funciones $f(x) = -3x^2 - 6x - 3$, $g(x) = 4x^2 - 7x + 5$ y $h(x) = -2x^2 + 11x - 1$, halla la función suma $f(x) + g(x) + h(x)$.

   a. $-x^2 - 2x - 1$ b. $-x^2 + 2x - 1$
   c. $-x^2 - 2x + 1$ d. $-x^2 + 2x + 1$

2. Es la expresión que representa el promedio del triple de un número con el doble de la diferencia de otros dos.

   a. $\frac{3a+2(b-c)}{2}$ b. $\frac{3a-2(b+c)}{2}$
   c. $\frac{3a+2(b-c)}{3}$ d. $\frac{3a-2(b-c)}{3}$

3. ¿Cuál es el resultado de multiplicar $x + 4$ con $x^2 - 4$?

   a. $x^3 - 16$
   b. $x^3 - 4x^2 - 16$
   c. $x^3 + 4x^2 - 4x - 16$
   d. $x^3 - 4x^2 + 4x - 16$

4. Encuentra el término 13 de la sucesión: 11, 10, 7, 2, –5, –14…

   a. –127 b. –133
   c. –142 d. –151

5. ¿Qué distancia recorre un auto que viaja a velocidad dada por $v(t) = 2t$ los primeros 10 segundos?

   a. 2 m b. 10 m
   c. 20 m d. 100 m

6. Un objeto se deja caer verticalmente desde el reposo, con aceleración de 10 m/s^2, ¿qué distancia recorre al transcurrir 1 segundo?

   a. 1 m b. 2 m
   c. 5 m d. 10 m

7. ¿Cuál es la pendiente de la sucesión dada por: $-7n + 12$?

   a. 5 b. –5
   c. –7 d. 12

8. ¿Cuál es la altura máxima que alcanzará un balón cuya trayectoria está descrita por $f(x) = -x^2 + 6x + 1$?

   a. 3 m b. 7 m
   c. 10 m d. 12 m

9. Es la razón del área de un cuadrado de lado 1 y el área de un triángulo rectángulo isósceles de hipotenusa 2.

   a. 1 b. 2
   c. $\frac{1}{2}$ d. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

10. El vigésimo elemento de la sucesión: 1, 3, 6, 10… es.

    a. 420 b. 400
    c. 210 d. 190

Evalúa tus evidencias

- **Utiliza la lista de cotejo para identificar lo que dominas con base en las evidencias generadas y guardadas en tu portafolio.**

Productos	Criterios	Sí	No
Encontrar la antiderivada de expresiones del tipo x^n.	Identifico la forma del área bajo la curva de una función monomial.		
	Conozco las derivadas de las funciones monomiales y aplico patrones para reconocer sus primitivas.		
	Obtengo una expresión general para las antiderivadas de funciones del tipo x^n.		
Completar una tabla de integración dada.	Reconozco las derivadas inmediatas para obtener la primitiva de una función.		
	Utilizo identidades y propiedades de las funciones para obtener las integrales solicitadas.		
	Reconozco patrones para las integrales de funciones conocidas y sé aplicarlos en nuevas integrales.		
Integrar funciones elementales dadas mediante fórmulas generales.	Aplico las fórmulas de integración inmediata.		
	Reconozco patrones y los utilizo en la integración de funciones dadas.		
	Utilizo un método de integración para determinar la antiderivada de una función.		

Rúbrica

Con base en la rúbrica, identifica tu nivel logrado en cada aprendizaje esperado. Recuerda repasar los temas para mejorar.

Aprendizajes esperados	Básico	Autónomo	Estratégico
Encuentra la antiderivada de funciones elementales.	Reconozco las antiderivadas de funciones elementales.	Identifico los coeficientes y exponentes relacionados con las antiderivadas de las funciones elementales.	Utilizo distintos métodos algebraicos para obtener y simplificar las antiderivadas de las funciones elementales.
Descubre relaciones inversas entre derivación e integración: "Si de una función se obtiene su derivada, qué obtengo si de esa derivada encuentro su antiderivada".	Entiendo la relación entre la derivada de una función y la antiderivada de la misma.	Conozco el teorema fundamental del cálculo y sé cómo aplicarlo a los problemas de antiderivadas.	Relaciono los conceptos de cambio instantáneo y acumulación, mediante sus formas de pendiente y área bajo la curva.
Calcula la antiderivada de funciones trigonométricas básicas.	Reconozco las antiderivadas inmediatas de las funciones trigonométricas básicas.	Aplico métodos de integración para determinar las antiderivadas de las funciones trigonométricas básicas.	Distingo el uso de métodos y equivalencias de funciones trigonométricas básicas para la determinación de sus antiderivadas.
Interpreta, por extensión o generalización, la integral indefinida de funciones polinomiales y trigonométricas básicas (seno y coseno).	Aplico correctamente loas métodos de integración para las funciones polinomiales y trigonométricas básicas.	Identifico el uso de las integrales indefinidas para obtener funciones de acumulación para las funciones polinomiales y trigonométricas.	Aplico las integrales indefinidas en los problemas que requieren conocer el área bajo la curva, como la velocidad y la posición.

Tercer parcial

Eje: Pensamiento y lenguaje variacional

Componentes	Contenidos centrales	Contenidos específicos
• Cambio y acumulación: elementos del cálculo integral.	• Tratamiento analítico de las integrales definida e indefinida y uso intuitivo de los procesos infinitos y las situaciones límite.	• Técnicas para obtener la antiderivada. ¿Qué significa integrar una función?, ¿podrías imaginar el llenado y vaciado de un recipiente en términos de la integración? ¿Qué patrones reconoces para la integral de x, x^2, x^3, ...? • Ejemplos de la cinemática y su interpretación contextual. ¿Qué es integrar en este contexto de la física? ¿Integrar la función velocidad, integrar la función aceleración? • Construcción de tablas de integración. • ¿Reconoces patrones básicos? • ¿Qué tipo de procesos se precisan para tratar con la acumulación y su medida, propiedades, relaciones y representaciones?

- Utiliza técnicas para la antiderivación de funciones conocidas.
- Obtiene la integral indefinida de una función dada.
- Visualiza la relación entre área e integral definida.
- Calcula la antiderivada de funciones trigonométricas *básicas*.
- *Utiliza sucesiones y límites para* obtener integrales definidas.

- Resolver situaciones del llenado de recipientes con flujo constante.
- Encontrar la posición de un móvil que se desplaza en línea recta con velocidad constante.
- Determinar la posición de un móvil que se desplaza rectilíneamente con aceleración *constante* y con velocidad inicial *conocida*.

Habilidades socioemocionales

Música para el alma

Para reflexionar

¿Disfrutas la música?

¿Has tenido días en los que lo único que te levanta es ponerte a escuchar música?

Nuestro objetivo

Poder relajarnos escuchando música.

Paso a paso

- En un momento a solas o usando audífonos, detén tu rutina y escucha las siguientes canciones:
  - *The Departure* de **Max Richter**
  - *The King's Speech* interpretado por **Alexandre Desplat**
  - *Nuvole Bianche* del compositor **Ludovico Einaudi**.
  - También puedes escuchar a **Dmitri Shostakovich**, **Grigory Sokolov** y **Chopin**.
  - O bien *Thinking Out Loud* y *Photograph* de **Ed Sheeran** o *Malibu* de **Miley Cyrus**.
- Después de escuchar las canciones, responde las siguientes preguntas:
  1. ¿Qué sentías al escuchar las canciones?
  2. ¿Tu humor tuvo algún cambio después de escuchar las canciones?, ¿cuál?

Para terminar

Escuchar música en un momento de estrés puede ser una manera de reiniciar y tomar nuevas energías, nunca dudes del poder de la música.

Proyecto de vida

A lo largo del semestre desarrollaremos tu Proyecto de vida, con el fin de clarificar lo que deseas para ti y que puedas tomar decisiones que marquen la dirección de tu futuro, así como realizar una reflexión sobre las implicaciones que tiene en tu vida el hecho de llevarlo a cabo.

Organiza la información de tu Proyecto de vida.

I. Copia y completa en tu cuaderno el siguiente cuadro.

1. Escribe en la primera columna las metas más importantes que deseas lograr. Agrega las filas que sean necesarias.

Meta	Ideas importantes a rescatar	Acciones que debo realizar	Beneficios que representa para mí	Beneficios que representa para mi entorno

2. Una vez que organizaste la información en la tabla, léela con atención para que tengas un panorama general de lo que implica el planteamiento de tu Proyecto de vida.
3. Escribe por qué consideras que es importante elaborar un Proyecto de vida.
4. Elabora un organizador gráfico en el que incorpores frases que te motiven a trabajar día con día en tu Proyecto de vida, incluye tus metas para que las tengas presentes todo el tiempo. Coloca este organizador en un lugar visible en tu casa. Utiliza el siguiente esquema para hacer un esbozo y ve enriqueciéndolo paulatinamente.

Proyecto de vida de: ______________________________

	Metas a corto plazo	Metas a mediano plazo	Metas a largo plazo
Personal			
Familiar			
Escolar			
Laboral			
Social			

Tratamiento analítico de las integrales definida e indefinida.

Previamente estudiaste el concepto de la integral indefinida y las primitivas de una función, viste diferentes técnicas para calcularlas y su relación con la derivada. Ahora vamos a estudiar el concepto de la integral definida y su relación con el área bajo la curva.

Es importante que tengas siempre presentes las tablas de integrales que construimos previamente, te serán muy útiles en las siguientes lecciones.

Suma de Riemann

A continuación, veremos la definición formal de una integral definida y el resto de la lección la usaremos para explicar cada uno de los elementos. Es necesario que recuerdes el concepto de límites, si tienes dudas te invitamos a que revises en tu libro de *Calculo diferencial* todas las definiciones necesarias.

Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y consideremos dos números reales a, b tal que a es menor que b.

La integral definida es una suma infinita, de hecho el símbolo ∫ representa una S larga y se usa para denotar la suma.

Una partición uniforme del intervalo cerrado [a, b] es una colección finita de números ascendentes $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$ donde cualesquiera dos números consecutivos están siempre a una misma distancia Δ_n. Vamos a denotar a la partición por P_n.

La suma de Riemann respecto a la función f y la partición P_n se define como

$$S_n = f(x_0)\Delta_n + f(x_1)\Delta_n + \ldots + f(x_n)\Delta_n = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\Delta_n.$$

La integral definida de la función f sobre (o respecto) al intervalo [a, b] es

$$S = \int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Si el límite previo no existe, diremos que la integral de f sobre el intervalo [a, b] no existe.

Veamos un ejemplo. Consideremos la función lineal

$$f(x)=3-\frac{1}{3}x.$$

En la imagen de la derecha puedes apreciar su gráfica. Vamos a determinar la integral definida de la función f respecto al intervalo $[0, 9]$.

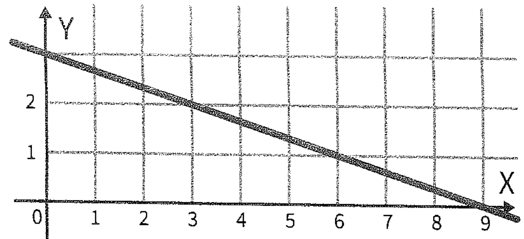


Figura 3.1

De tu curso de Cálculo diferencial sabes que calcular un límite es lo mismo que aproximar un número, por eso en este caso vamos a analizar la tabla:

n	Δn	S_n
1	$\frac{9-0}{1}=9$	$S_1=f(x_0)\Delta_1+f(x_1)\Delta_1=9(3+0)=27.$
2	$\frac{9-0}{2}=4.5$	$S_2=f(x_0)\Delta_2+f(x_1)\Delta_2+f(x_2)\Delta_2=4.5(3+1.5+0)=20.25.$
5	$\frac{9-0}{5}=1.8$	$S_5=\sum_{j=0}^{5}f(x_j)\Delta_5=1.8(3+2.4+1.8+1.2+0.6+0)=16.2.$
10	$\frac{9-0}{10}=0.9$	$S_{10}=\sum_{j=0}^{10}f(x_j)\Delta_{10}=0.9(16.5)=14.85.$
100	$\frac{9-0}{100}=0.09$	$S_{100}=\sum_{j=0}^{100}f(x_j)\Delta_{100}=13.63.$
1000	$\frac{9-0}{1000}=0.009$	$S_{1000}=\sum_{j=0}^{1000}f(x_j)\Delta_{1000}=13.51.$
10000	$\frac{9-0}{10000}=0.0009$	$S_{10000}=\sum_{j=0}^{10000}f(x_j)\Delta_{10000}=13.501.$
100000	$\frac{9-0}{100000}=0.00009$	$S_{100000}=\sum_{j=0}^{100000}f(x_j)\Delta_{100000}=13.5001.$

Con esta tabla podemos afirmar que $S=\int_0^9 f(x)dx=13.5.$

Como puedes observar, determinar una integral definida es un proceso un tanto largo. Más adelante veremos su relación con los temas previos y cómo es que puedes realizar estas integrales de manera más rápida.

Las últimas cuatro entradas de la tabla se calcularon programando. El código del último caso es:

```
delta=0.00009
sum=0
for x in range(0,100001):
sum+=(9-x*delta)*delta
print(sum)
```

Es en Python, investiga cómo puedes hacer tus ejemplos.

Actividad de aprendizaje 1

4. **Justifica en tu cuaderno el porqué de esa igualdad y su relación con la tabla y con el concepto de límite.**

1. Dada la función $f(x) = -x^2 + \frac{1}{2}$, calcula las sumas de Riemann que se piden respecto al intervalo [0, 10]. En tu cuaderno escribe todos los pasos necesarios.

n	Δx	[illegible]
1		
2		
5		
10		
100		
1000		
10000		
100000		

Para las últimas cuatro líneas de la tabla es posible que necesites usar el código de Python que te dimos en la lección previa y en el código QR de la izquierda.

TIC

Visita la liga para poder usar Python en línea.

bkmrt.com/B4oihJ

2. Con las cuentas de la tabla anterior, determina la siguiente integral definida

$$\int_0^{10} -x^2 + \frac{1}{2}dx = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ .$$

La relación entre el área y la integral definida

Es momento de comparar lo que hemos aprendido hasta ahora. Primero, recordemos cómo calculábamos el área bajo la curva de la función f de x_0 a x_1 usando rectángulos.

Para aproximar con ***n* subdivisiones usando rectángulos** el área bajo la curva de x_0 a x_1, donde n es un número natural, vamos a hacer lo siguiente:

1. Subdivide el intervalo de x_0 a x_1 en n pedazos, preferentemente del mismo tamaño.
2. Enumera de manera creciente los puntos que creaste con la subdivisión, por ejemplo $x_0', x_1', \ldots, x_n'$.
3. Calcula el área de los rectángulos de la forma $(x_m, 0)$, $(x_m, f(x_{m+1}))$, $(x_{m+1}, 0)$ y $(x_{m+1}, f(x_m+1))$.
4. Suma las áreas.

Ahora, la integral definida de f respecto al intervalo $[x_0, x_1]$ es $S=\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} S_n$, donde

$$S_n = f(x_0)\Delta_n + f(x_1)\Delta_n + \ldots + f(x_n)\Delta_n = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\Delta_n.$$

¿Notas alguna semejanza entre las definiciones? Escribe en el siguiente espacio tus ideas.

____

____

____

____

Antes de dar con la relación precisa entre ambos conceptos, vamos a analizar un ejemplo y su gráfica. Consideremos la función $f(x)=1-\frac{x}{10}$.

En la siguiente tabla, vamos a aproximar el área bajo la curva de 0 a 10 con 5 rectángulos y vamos a calcular la suma de Riemann con una partición uniforme de tamaño 5.

Área	$R_1+R_2+R_3+R_4+R_5=6$	
S_5	$\Delta_5=2$	$S_5=\sum_{j=0}^{5} f(x_j)\Delta_n = 6.$

A continuación, puedes observar los rectángulos que elaboramos para aproximar el área.

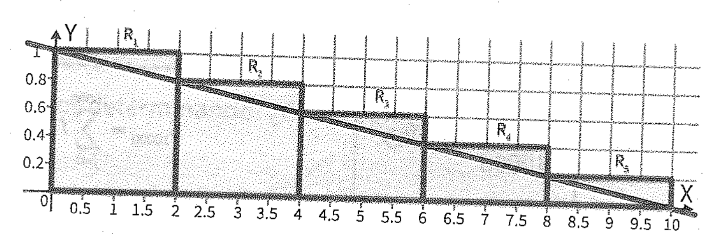


Figura 3.2

Ahora debe ser clara la relación precisa entre las sumas de Riemann y el método de aproximar el área bajo la curva: **ambos métodos son una manera de aproximar el área bajo la curva**. Con esto en mente tenemos lo siguiente.

El área bajo la curva de la función $f(x)$ de x_0 a x_1 es igual a la integral definida de f respecto al intervalo $[x_0, x_1]$, es decir,

$$\text{Área} = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx.$$

De forma análoga tenemos que el **área absoluta bajo la curva de la función $f(x)$ de $x0$ a $x1$ es igual a la integral definida de $|f|$ respecto al intervalo $[x_0, x_1]$**, es decir,

$$\text{Área absoluta} = \int_{x_0}^{x_1} |f(x)|dx.$$

La prueba de esas dos igualdades es manipulando de forma correcta las sumas de Riemann y los límites involucrados. Si quieres ver cómo se realizan esas pruebas, te invitamos a que consultes la bibliografía al final de este libro.

Veamos un último ejemplo. Vamos a aproximar el área bajo la curva de la función $f(x) = x^2 + 1$ de 0 a 5. Como queremos aproximar, vamos a usar sumas de Riemann para ello, en este caso tenemos que:

n	Δn	S_n
1	$\frac{5-0}{1} = 5$	$S_1 = f(x_0)\Delta_1 + f(x_1)\Delta_1 = 5(1+26) = 135.$
2	$\frac{5-0}{2} = 2.5$	$S_2 = f(x_0)\Delta_2 + f(x_1)\Delta_2 + f(x_2)\Delta_2 = 2.5(1+7.25+26) = 85.625.$
10	$\frac{5-0}{10} = 0.5$	$S_{10} = \sum_{j=0}^{10} f(x_j)\Delta_{10} = 53.625.$
100	$\frac{5-0}{100} = 0.05$	$S_{100} = \sum_{j=0}^{100} f(x_j)\Delta_{100} = 47.34.$
1000	$\frac{5-0}{1000} = 0.005$	$S_{1000} = \sum_{j=0}^{1000} f(x_j)\Delta_{1000} = 46.73.$
10000	$\frac{5-0}{10000} = 0.0005$	$S_{10000} = \sum_{j=0}^{10000} f(x_j)\Delta_{10000} = 46.67.$
100000	$\frac{5-0}{100000} = 0.00005$	$S_{100000} = \sum_{j=0}^{100000} f(x_j)\Delta_{100000} = 46.667.$

Actividad de aprendizaje 2

Usando lo que has visto en las dos lecciones previas, aproxima lo mejor que puedas el área bajo la curva de la función $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, respecto al intervalo [−1, 1]. Primero rellena la siguiente tabla usando sumas de Riemann. Escribe en tu cuaderno todas las cuentas necesarias.

n	Δn	S_n
1		
2		
5		
7		
10		
100		
1000		
10000		
100000		

Con la información de la tabla, determina la siguiente integral definida

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ .$$

Posteriormente, dibuja en tu cuaderno la gráfica de la función $f(x)$.

Con toda esta información, responde en tu cuaderno las siguientes preguntas, explicando a detalle cada una de tus ideas:

- ¿Qué región es la que estamos determinando? ¿Conoces alguna fórmula para el área de esa región?
- ¿Qué sucede si al valor de la integral definida lo multiplicas por dos? ¿Es algún número conocido?
- ¿Cómo se relacionan las dos preguntas previas?

Segunda parte del teorema fundamental del cálculo

Previamente estudiamos el concepto de funciones de acumulación. El teorema fundamental del cálculo dice que si $f(t)$ es continua y definimos

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt,$$

entonces,

$$F'(c)=\left(\int_a^c f(t)dt\right)'=f(c).$$

Por lo que vimos en la lección anterior la función $F(x)$ determina el área bajo la curva respecto al intervalo $[a,x]$, de ahí viene su nombre de función de acumulación (de área). La primera parte del teorema fundamental del cálculo establece una relación entre la integral definida y la derivada. La segunda parte del teorema fundamental del cálculo nos da una relación entre la integral definida y las primitivas.

El **segundo teorema fundamental del cálculo** (o **regla de Newton-Leibniz**, o también **regla de Barrow**, en honor al matemático inglés Isaac Barrow, profesor de Isaac Newton) dice que,

"Sea $f(x)$ un función definida en el intervalo $[a, b]$. Si la integral definida de f respecto al intervalo $[a, b]$ existe, entonces

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(\mathrm{a}),$$

donde $F(t)$ es una primitiva de la función $f(x)$. "

Gracias a la segunda parte del teorema fundamental del cálculo podemos calcular integrales definidas de forma fácil. Veamos dos ejemplos.

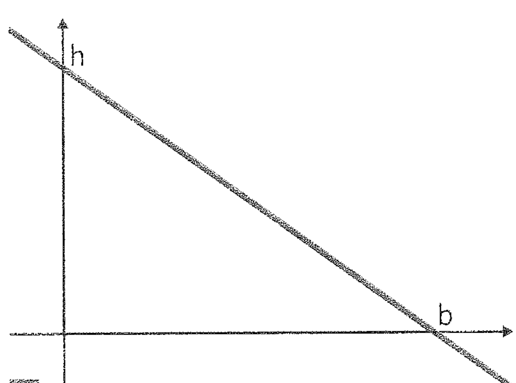


Figura 3.3

Vamos a calcular el área de un triángulo rectángulo de base b y de altura h. Sin perdida de generalidad podemos asumir que el triángulo está ubicado sobre el plano cartesiano como en la imagen de la izquierda.

En este caso, tenemos una línea recta, la cual es la gráfica de la función

$$f(x)=h+\frac{-h}{b}x,$$

de esta forma, lo que nos interesa calcular es el área bajo la curva de la función f(x).

Como la función $f(x)$ es lineal, tenemos que una primitiva de la función $f(x)$ esta dada por

$$F(x)=hx+\frac{-h}{2b}x^2+c.$$

Finalmente, por la segunda parte del teorema fundamental del cálculo tenemos que,

$$\int_0^b f(x)dx=F(b)-F(0)=\left(hb-\frac{h}{2b}b^2+c\right)-(0+c)=\frac{hb}{2}.$$

Es decir, el área de un triángulo rectángulo de base b y altura h es $\frac{hb}{2}$ lo cual coincide con la fórmula que conoces desde la primaria.

Es importante que notes que el papel de la constante c no influye para nada cuando se quiere determinar la integral definida.

Veamos el siguiente ejemplo. Vamos a determinar el área bajo la curva de la función $f(x) = x^2$ de 0 a 1. Previamente habíamos visto algunas aproximaciones y estábamos casi seguros de que el área era de 1/3. Vamos a hacer al cálculo exacto, para ello tenemos la función

$$f(x) = x^2,$$

y una primitiva de la función es

$$F(x)=\frac{1}{3}x^3.$$

Por la segunda parte del teorema fundamental del cálculo tenemos que,

$$\int_0^1 f(x)dx=F(1)-F(0)=\frac{1}{3}.$$

Lo cual corrobora nuestra primera aproximación.

Para finalizar la lección, es importante destacar que:

- Si vas a utilizar primitivas para determinar una integral definida, puedes asumir que la constante c es igual a cero, eso te facilitará un poco las cuentas.
- Debes determinar de manera correcta las primitivas, si están mal, entonces tus integrales definidas también van a estar mal.

Visita la liga http://bkmrt.com/AYQ7b6, para hacer un repaso del teorema fundamental del cálculo y las integrales definidas.

Actividad de aprendizaje 3

Determina las siguientes integrales definidas. En tu cuaderno escribe todas las cuentas y sé preciso con las propiedades y teoremas que uses en cada paso.

1. $\int_{-8}^{1} x^2+8x-1dx =$ ....

2. $\int_{-15}^{-9} \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+2x-4dx =$ ....

3. $e\int_{-\pi}^{\pi} \left((x+3)^3-\pi\right)dx =$ ....

4. $\int_{0}^{\pi} y\cos(x)+4dx =$ ....

5. $\int x\,\mathrm{sen}(x)+\cos^2(x)dx =$ ....

6. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} x\,\mathrm{sen}(x)+\cos^2(x)dx =$ ....

7. $\int_{2}^{5} e^x+\ln x\, dx =$ ....

8. $\int_{1}^{e} (\ln t-5)^5 dt$ ....

9. $\int_{1}^{100} e^{\ln x}+x\ln x dx =$ ....

10. $\int_{0}^{2} e^{x+e^x} dx =$ ....

11. $\int_{-5}^{5} \frac{1}{at+b}dt =$ ....

12. $\int_{2}^{8} 5^x x^2 dx =$ ....

13. $\int_{-\pi}^{\frac{3\pi}{2}} -x\cos(x)dx =$ ....

14. $\int_{2}^{10} \mathrm{sen}(\ln x)dx =$ ....

¿Qué tipo de procesos se precisan para tratar con la acumulación y su medida, propiedades, relaciones y representaciones?

Cálculo de longitudes, áreas y volúmenes generados por curvas

Como vimos, el área de una región (delimitada por una curva y los ejes del plano cartesiano) se puede calcular a través de una integral definida. Al final de cuentas el área sólo es una medida que podemos asociar a una figura con largo y ancho, de manera general tenemos lo siguiente:

Tiene	Asociamos
Largo. Por ejemplo, un segmento de línea.	Su longitud.
Largo y ancho. Por ejemplo, un cuadrado.	Su área.
Largo, ancho y profundidad. Por ejemplo, un cubo.	Su volumen.

La matemática es una ciencia abstracta, no necesita saber qué está midiendo. La teoría funciona casi siempre igual en cualquier circunstancia. En este caso, vamos a ver cómo usar el concepto de integral definida para determinar la longitud de un arco.

Imagina que tenemos un arco como en la imagen de la derecha. De forma análoga al área bajo la curva, para determinar la longitud del arco podemos aproximar el arco a través de varias secantes, en la imagen tenemos cuatro secantes en total.

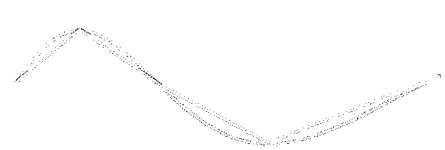


Figura 3.4

La ventaja de manejar secantes es que la longitud de los segmentos rectos es fácil de determinar usando el teorema de Pitágoras.

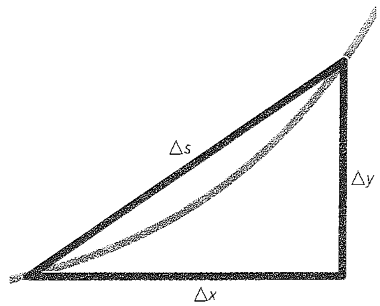


Figura 3.5

En la imagen de la izquierda tenemos una secante y como podemos apreciar, podemos construir un triángulo rectángulo de base Δx, altura Δy e hipotenusa Δs. En este caso, por el teorema de Pitágoras tenemos que

$$\Delta s=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}=\Delta x\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}=\Delta x\sqrt{1+\left(m_{\Delta x}\right)^2},$$

donde $m_{\Delta x}$ es la pendiente de la recta secante.

De esta forma si tenemos n secantes, tenemos que su longitud es:

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\Delta s_i.$$

La longitud sale al tomar cada vez más secantes, de esta forma **la longitud del arco parametrizado por la función $f(x)$ de x_0 a x_1** está dada por

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx.$$

Recuerda que en el fondo, la integral definida es una suma infinita por eso al tomar los límites sale una integral y como la derivada es la pendiente de la recta tangente en un punto, por eso $m_{\Delta x}$ se reemplazó en el límite como $f'(x)$.

Veamos un ejemplo. Calculemos la longitud de la hipotenusa de un triángulo de base 3 y de altura 4. En este caso, la hipotenusa es la gráfica de la función $f(x)=4-\frac{4}{3}x$.

Por nuestra formula anterior, tenemos que la longitud de la hipotenusa está dada por

$$S=\int_0^3\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx=\int_0^3\sqrt{1+\left(-\frac{4}{3}\right)^2}\,dx=\int_0^3\sqrt{\frac{25}{9}}\,dx=3\cdot\frac{5}{3}=5.$$

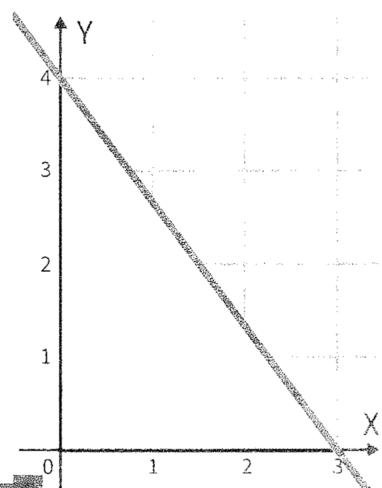


Figura 3.6

Lo cual coincide con lo que esperábamos por el teorema de Pitágoras.

Para finalizar la lección es importante recalcar:

- Para determinar las integrales involucradas en longitud de arco, generalmente tendrás que usar cambios de variable trigonométricos así que asegúrate de aprender bien el método y tener tus tablas de integrales a mano.
- El primer paso para resolver los problemas es tener la función que parametriza el arco, es aquí donde deberás leer con detenimiento el problema para construir la función involucrada.

Actividad de aprendizaje 4

Realiza lo que se pide.

1. Halla la longitud de la curva dada por la función

$$f(t)=\frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}},$$

con t en el intervalo cerrado de 0 a 2.

2. Usando longitud de arco determina el perímetro de un cuadrado de lado d.

3. Determina el perímetro de un triángulo cuyos vértices están en $(-1, 0)$, $(2, 0)$ y $(8, 0)$ usando las fórmulas de longitud de arco.

4. Calcula la longitud de arco de la curva dada por la función

$$f(t) = 4t^2,$$

con t en el intervalo cerrado de 1 a 10.

5. Calcula la longitud de la curva $x^2 + y^2 = 16$ en el intervalo $[1, 3]$.
Nota: Pasa la ecuación a una función y considera sólo imágenes positivas.

6. Calcula la longitud de la curva dada por la función

$$f(x)=\frac{x^4}{2}+\frac{x^2}{16},$$

en el intervalo

$$\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right].$$

7. Usando longitud de arco determina el perímetro de un polígono de n lados y con apotema a. Nota: Realiza en tu cuaderno una serie de dibujos y no pienses en el problema completo, calcula la longitud de un lado y luego, usando operaciones básicas, obtén el resultado final.

8. Una partícula se mueve describiendo una trayectoria dada por la gráfica de la función

$$f(t)=\frac{\pi}{3}t^{\frac{4}{3}}.$$

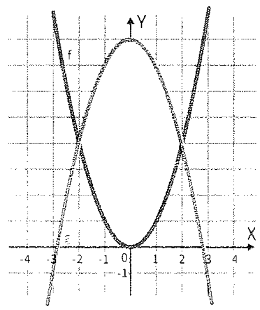
Determina cuál es la distancia recorrida por la partícula después de

- Cinco minutos.
- Diez minutos.
- Treinta minutos.
- Una hora.

Ahora que tenemos una interpretación geométrica de la integral definida, podemos realizar cada vez ejemplos más complicados. Veamos un ejemplo concreto.

Consideremos las funciones

$$f(x) = x^2 \text{ y } g(x) = -x^2 + 8.$$



Las gráficas de ambas funciones delimitan una región roja cerrada tal y como se muestra en la imagen de la izquierda. ¿Cómo podemos determinar el área de esa región?

Para responder a esta pregunta, es importante que observes las imágenes.

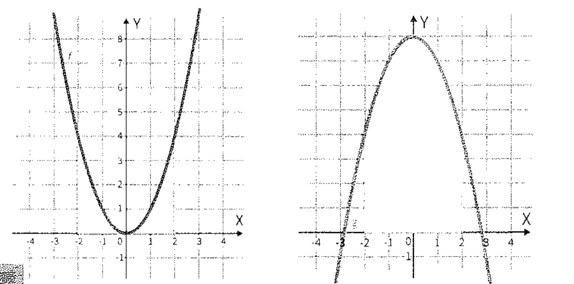


Figura 3.7

La imagen de la izquierda corresponde al área bajo la curva de la función $g(x)$ y el de la derecha al de la función $f(x)$. En este caso observa que si a la primera imagen le restamos el área de la segunda imagen, obtenemos la región que nos interesa. Por lo tanto, la región que nos interesa es

$$\int_{-2}^{2} g(x)dx - \int_{-2}^{2} f(x)dx.$$

Finalmente como

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 \quad \text{y} \quad G(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 8x,$$

son primitivas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ tenemos que por la segunda parte del teorema fundamental del cálculo

$$\int_{-2}^{2} g(x)dx - \int_{-2}^{2} f(x)dx = G(2) - G(-2) - (F(2) - F(-2)) = \frac{80}{3} - \left(\frac{16}{3}\right) = \frac{64}{3}.$$

Veamos otro ejemplo. En este caso considera las funciones

$$f(x) = x \text{ y } g(x) = x^3.$$

Vamos a calcular el área delimitada por ambas regiones y el primer cuadrante. En la imagen siguiente tienes una ilustración del área.

Para localizar los puntos donde las curvas se cortan, debemos encontrar un punto x que iguale a las funciones f y g, es decir, que cumpla la ecuación

$$x = x^3.$$

Como las soluciones son positivas, ya que están en el primer cuadrante, tenemos que los puntos donde ambas gráficas se cortan son (0, 0) y (1, 1).

Igual que antes, observa las áreas bajo la curva de la función f y g.

De esas imágenes observamos que el área que nos interesa es la diferencia del área de la función $f(x)$ respecto a la función $g(x)$. Por lo tanto, el área es

$$\int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 g(x)dx.$$

Finalmente como

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 \quad \text{y} \quad G(x) = \frac{1}{4}x^4,$$

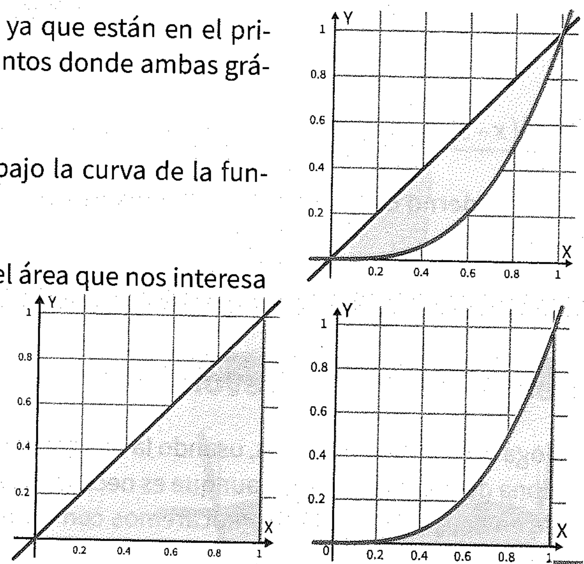


Figura 3.8

son primitivas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ tenemos que por la segunda parte del teorema fundamental del cálculo

$$\int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 g(x)dx = F(1) - F(0) - (G(1) - G(0)) = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}.$$

Actividad de aprendizaje 5

Determina el área delimitada por las curvas:

1. $f(x) = x$ y $g(x) = \frac{4}{3}x^2$.
2. $f(x) = x$ y $g(x) = x^3$.
3. $f(x) = \text{sen}(x)$ y $g(x) = \pi x - x^2$.
4. $f(x) = \sqrt{x+1}$ y $g(x) = x - 1$.
5. $f(x) = \sqrt{1-x}$ y $g(x) = \sqrt{x+1}$.
6. $f(x) = -x + 4$ y $g(x) = \sqrt{x+2}$.
7. $f(x) = \sqrt{x+1}$, $g(x) = x + 1$ y el eje X.
8. $f(x) = 1 - x$, $x = 0$ y $g(x) = e^x - e$.
9. $f(x) = \frac{x^2}{4}$ y $g(x) = \frac{x^2+4}{8}$.
10. $f(x) = x(x-2)$ y $x^2 = 1$.
11. $f(x) = x^2$ y $g(x) = -x^2 + 2$.
12. $f(x) = |x|$ y $g(x) = x^2$.

13. $f(x)=x(x-1)(x-3)(x-6)$, $x=0$ y $x=7$.

14. El área de un círculo de radio 1. Nota: El área que buscas está compuesta por dos piezas, cada una delimitada por el eje X. Deberás usar tus identidades trigonométricas.

15. $f(x)=(x+1)(x-3)$ y $g(x)=-(x-1)(x+3)$.

16. $f(x)=|x^2-3|$ y $g(x)=2x^2+1$.

4 **Realiza en tu cuaderno cada uno de los dibujos de cada problema y marca las regiones que te interesa calcular.**

De forma análoga al caso de longitudes, usando la integral también podemos calcular volúmenes. Le teoría funciona de manera análoga, aunque es necesario ser más cuidadoso con algunas cosas, es por eso que en este libro sólo nos enfocaremos con un tipo especial de objeto, los llamados sólidos de revolución.

Un **sólido de revolución** es un cuerpo que se obtiene mediante la rotación de una superficie plana respecto a un eje.

Por ejemplo, en la siguiente imagen tenemos tres sólidos de revolución. En este caso podemos observar que el eje de rotación es el eje Y y que usando esa rotación obtenemos:

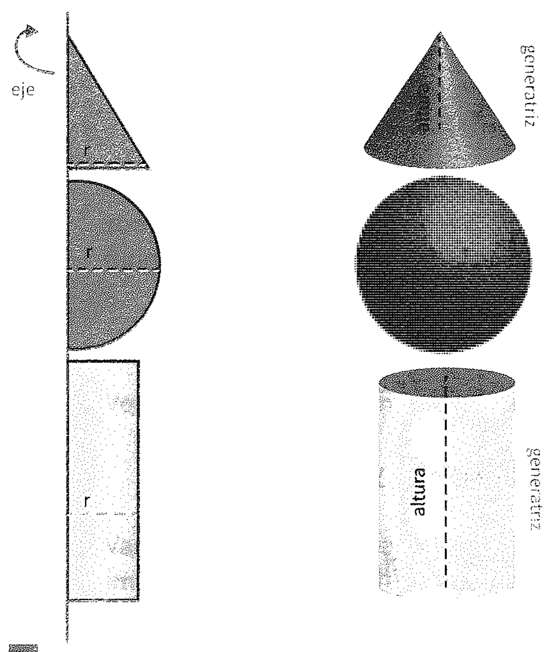


Figura 3.9

De triángulo	a	cono.
De medio circulo	a	esfera.
De un rectángulo	a	cilindro.

En general, así son los sólidos de revolución, iniciamos con una figura plana y rotándola obtenemos un cuerpo con volumen. Como puedes observar, determinar qué sólido de revolución se obtiene puede ser difícil de imaginar y es una habilidad que adquieres después de hacer varios ejercicios.

¿Cómo podemos determinar el volumen de un sólido de revolución?

La respuesta depende del eje de rotación. En general, tenemos dos casos.

Rotación respecto al eje X

Cuando tenemos una superficie definida sobre un intervalo $[a, b]$ y consideramos el sólido de revolución respecto al eje X, entonces el volumen está dado por

$$\pi\int_a^b f^2(x)dx,$$

donde $f(x)$ es la función que delimita la superficie dada.

Si la superficie está delimitada por dos curvas, como en la lección anterior, la fórmula en este caso es

$$\pi\int_a^b f^2(x)-g^2(x)dx,$$

donde f y g son las funciones que generan cada curva.

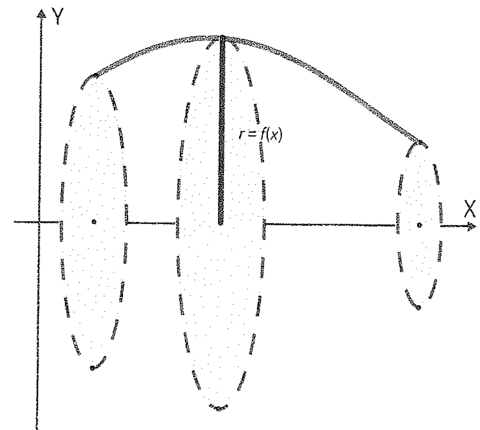


Figura 3.10

Rotación respecto al eje Y

Cuando tenemos una superficie definida sobre un intervalo $[a, b]$ y consideramos el sólido de revolución respecto al eje Y, entonces el volumen está dado por

$$2\pi\int_a^b xf(x)dx,$$

donde $f(x)$ es la función que delimita la superficie dada.

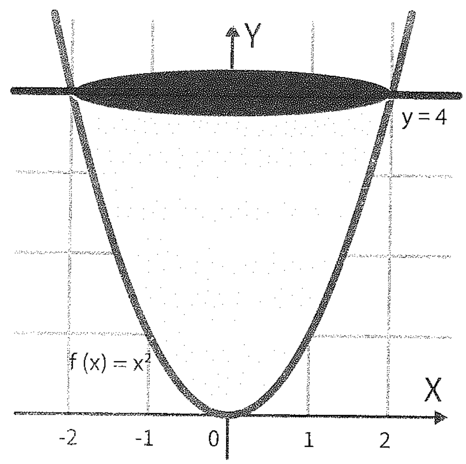


Figura 3.11

Si la superficie está delimitada por dos curvas, como en la lección anterior la fórmula en este caso es

$$2\pi\int_a^b x(f(x)-g(x))dx,$$

donde f y g son las funciones que generan cada curva.

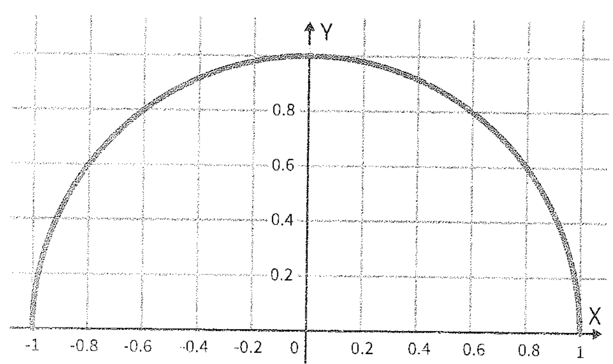


Figura 3.12

Vemos un ejemplo. Consideremos la función

$$f(x)=\sqrt{1-x^2}\ .$$

Vamos a encontrar el volumen del sólido de revolución con respecto al eje X. En la Figura 3.12 puedes observar la gráfica de la función la cual está delimitada por el intervalo $[-1, 1]$.

Por la fórmula del volumen de un sólido de revolución con respecto al eje X tenemos que el volumen es igual a

$$\pi\int_{-1}^{1} f^2(x)dx = \pi\int_{-1}^{1} 1 - x^2\,dx = \pi\left(2 - \frac{2}{3}\right) = \frac{4\pi}{3}.$$

Esta fórmula te debería ser conocida, es justamente la que aprendiste para determinar el volumen de una esfera de radio igual a uno. Lo que sucede en este caso es que al rotar la gráfica de la función $f(x)$ respecto al eje X, lo que obtenemos es una esfera.

Cuando el eje de rotación es diferente a los ejes X o Y es posible obtener fórmulas, pero son más complejas y quedan fuera del alcance de este libro.

En general, cuando determines volúmenes debes cuidar de identificar tus funciones f y g, y debes identificar cuál es tu eje de rotación.

Actividad de aprendizaje 6

Realiza lo siguiente.

1. Calcula el volumen del sólido de revolución que se genera al girar en torno al eje X la región delimitada por la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x}$ y la recta $x = 4$.
2. Calcula el volumen de un cono de radio r y altura h.
3. Calcula el volumen del sólido de revolución que se genera al girar en torno al eje X la región delimitada por la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x} + 3$ y la recta $x = 5$.
4. Calcula el volumen del sólido de revolución que se genera al girar en torno al eje X la gráfica de la función $f(x) = x + 2$, en el intervalo $[0, 4]$.
5. Calcula el volumen de un cono de radio 5 y altura 20.
6. Determina el volumen de un cilindro de altura h y radio r.
7. Calcula el volumen del sólido de revolución que se genera al girar en torno al eje Y la región delimitada por la gráfica de la función $f(x) = 2\sqrt{x} + 1$ y las rectas $x = 4$ y $x = 1$.
8. Se perfora un agujero redondo de radio a que pasa por el centro de una esfera de radio b, con b mayor que a. Encuentra el volumen del sólido que queda.
9. Un tazón tiene una forma que puede generarse al hacer girar en torno al eje Y la gráfica de $f(x) = \frac{x^2}{2}$ entre $y = 0$ e $y = 5$. Determina el volumen del tazón.
10. Calcula el volumen del sólido de revolución que se genera al girar en torno al eje X la gráfica de la función $f(x) = \frac{4}{5}x - 8$ en el intervalo $[10, 100]$.

¿Podrías imaginar el llenado y vaciado de un recipiente en términos de la integración?

Una vez que tenemos las fórmulas para determinar el volumen de sólidos de revolución, podemos resolver problemas más complejos. Veamos un ejemplo.

Tenemos una maceta de 64 cm de altura que fue construida a través de una parábola con vértice en el origen y con foco en punto (0, 1). Llenamos nuestra maceta y observamos que tiene una fuga de forma que

- A los cinco minutos el nivel del agua ha bajado 5 cm.
- A la media hora sólo tenemos 4 cm de agua.

Vamos a determinar:

1. El volumen total de agua.
2. La cantidad de agua que perdimos a los 5 y 30 minutos.

TIC

Te invitamos a que consultes el código QR para hacer un repaso del volumen de sólidos de revolución.

bkmrt.com/m6hyOp

El problema implícitamente dice que el florero es en realidad un sólido de revolución, así que lo primero que necesitamos es encontrar con la función $f(x)$ que delimita la región que nos interesa. En este caso, como tenemos una parábola con vértice en el origen y con foco en punto (0, 1) concluimos que la función es

$$f(x) = x^2.$$

En la siguiente imagen puedes apreciar la gráfica de la función $f(x)$. Como la maceta tiene una altura de 64 cm, concluimos que la gráfica está delimitada por el intervalo [−8, 8], es un sólido de revolución es respecto al eje Y y además, la región roja nos genera todo el volumen.

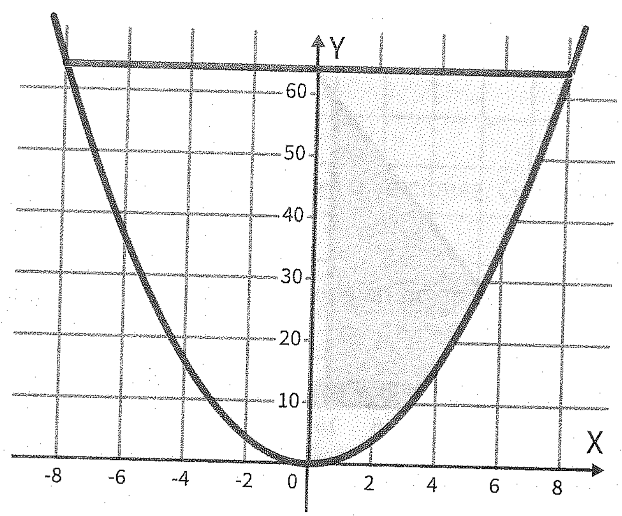


Figura 3.13

Con esto tenemos que el volumen total de agua en el florero es

$$2\pi\int_0^8 xf(x)dx = 2\pi\int_0^8 x^3\,dx = 2\pi\frac{1}{4}(4096) = 2048\pi.$$

Con esto concluimos que nuestro florero tiene un volumen de 2048π cm^3.

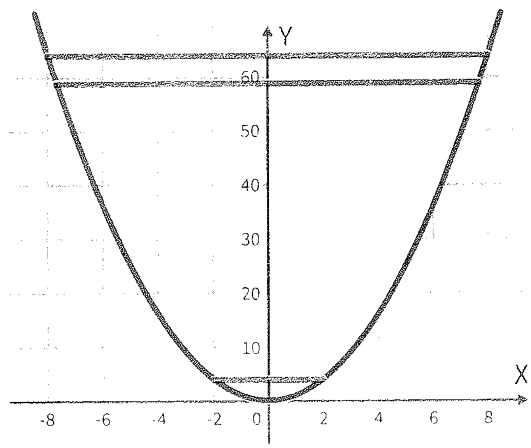


Figura 3.14

Después de 5 y 30 minutos, perdimos cierta cantidad de agua, en la siguiente imagen puedes apreciar los niveles de agua.

En este, tenemos que el volumen de agua a los 5 y a los 30 minutos es

$$V_5 = 2\pi \int_0^{\sqrt{59}} x^3 = \frac{3481}{2}\pi. \quad V_{30} = 2\pi \int_0^{2} x^3 = 8\pi.$$

Por lo tanto, la cantidad de agua que perdimos a los 5 y 30 minutos está dada por la diferencial del volumen total menos el volumen a los 5 y 30 minutos, es decir

$$2048\pi - \frac{3481}{2}\pi = \frac{615}{2}\pi, \text{ y } \quad 2048\pi - 8\pi = 2040\pi.$$

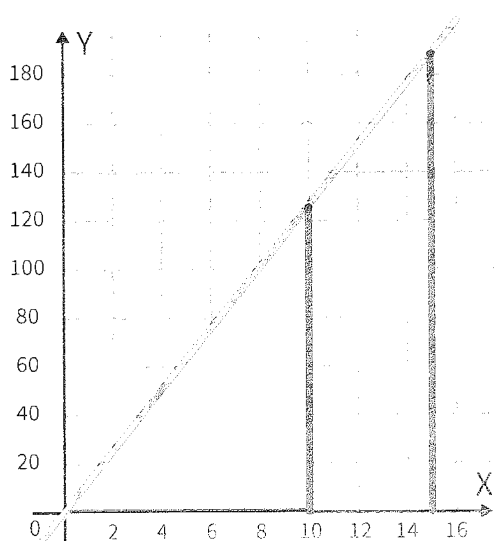


Figura 3.15

Veamos otro ejemplo. Considera un trofeo generado por el sólido de revolución generado por la función

$$f(x) = 4\pi x,$$

tomando como eje de revolución el eje X.

Empezamos a llenar el trofeo y a los 5 minutos tenemos 10 cm de altura de agua y a los 10 minutos tenemos 15 cm de altura de agua.

Vamos a determinar el volumen promedio con la que se llena. Para ello, primero necesitamos saber cuánta agua tiene el trofeo a los 5 y 10 minutos.

Por la imagen de arriba observamos que nos interesa determinar el volumen del sólido delimitado por el intervalo [0,10] y [0,15]. De esta forma tenemos que

$$V_{10} = \pi \int_0^{10} (4\pi x)^2 dx = \frac{16000}{3}\pi^3 \quad \text{y} \quad V_{15} = \pi \int_0^{15} (4\pi x)^2 dx = 18000\pi^3.$$

El volumen promedio es el cambio de volumen respecto al tiempo, por lo tanto el volumen promedio es

$$\frac{18000\pi^3 - \dfrac{16000}{3}\pi^3}{15-10} = \frac{7600}{3}\pi^3.$$

Actividad de aprendizaje 7

Resuelve el siguiente problema. Realiza en tu cuaderno todas las operaciones.

Tenemos una cubeta cilíndrica que fue construida a través de un rectángulo de altura de 50 cm. Llenamos nuestra cubeta y observamos que tiene una fuga, de forma que

- A los cinco minutos el nivel del agua ha bajado 10 cm.
- A la media hora sólo tenemos 7.5 cm de agua.

Determina:

- El volumen total de agua.
- La cantidad de agua que perdimos a los 5 y 30 minutos.
- La cantidad de agua que perdimos en promedio.

Actividad de aprendizaje 8

Productos esperados

Considera un cono generado como un sólido de revolución de altura *h* y de radio *r*. Empezamos a llenar el cono y

- a los 5 minutos tenemos 8 cm de altura de agua.
- a los 10 minutos tenemos 16 cm de altura de agua.
- a los 15 minutos el cono se llenó.

Determina cuánta agua tiene el cono en cada una de las tres mediciones. Con estas mediciones, analiza si el flujo de agua era constante o no.

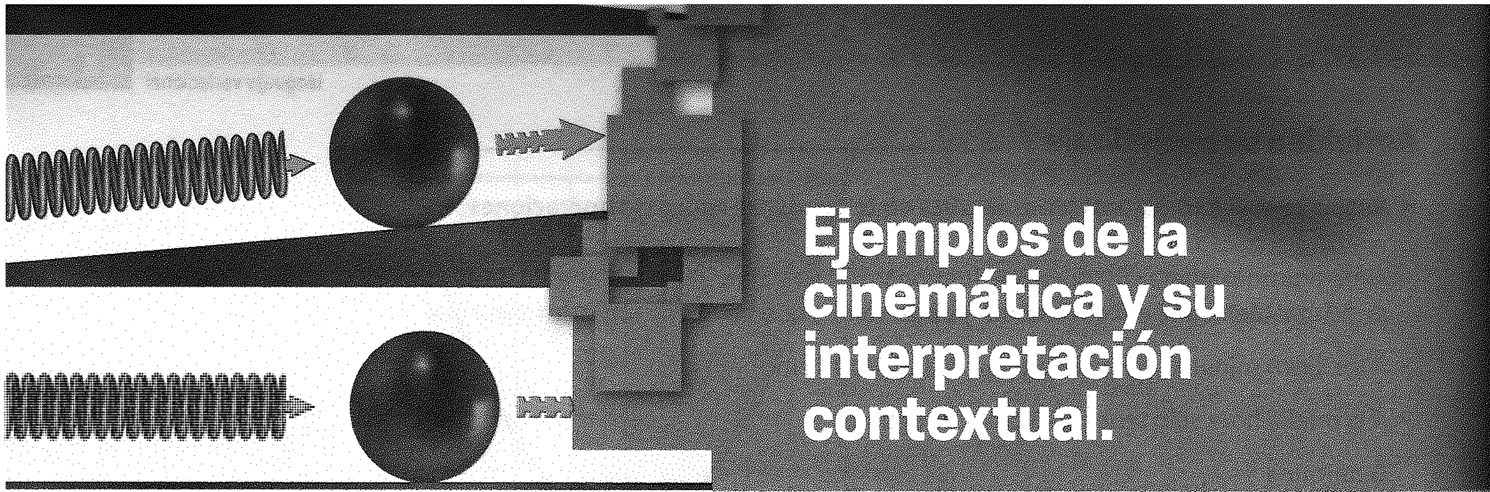
Escribe todas las respuestas, procedimientos, ideas y dibujos en hojas aparte, que deberás anexar a tu portafolio de evidencias.

Los sólidos de revolución en el día a día

La alfarería toma como base la idea de construcción de los sólidos de revolución.

El uso del torno para realizar piezas de metal, de igual manera, usa dicho concepto.

Para la realización de modelos en tercera dimensión también es fundamental el uso de curvas y la revolución sobre un eje.



Ejemplos de la cinemática y su interpretación contextual.

¿Qué es la integral en ese contexto de la física?

En la integral definida en cinemática

Glosario

Velocidad (aceleración) instantanea.

Velocidad (aceleración) instantánea es la que tiene el cuerpo en un instante específico, en un punto determinado de su trayectoria.

En tu curso de Cálculo diferencial viste que la derivada tenía una interpretación muy sencilla en mecánica. A modo de resumen, tenemos la tabla

La función de ...	Derivando obtenemos ...
desplazamiento respecto al tiempo	la velocidad instantánea
velocidad respecto al tiempo	la aceleración instantánea

Ahora, el teorema fundamental del calculo nos dice que la integral y la derivada son dos operaciones contrarias (salvo una constante), de esta forma tenemos que

La función de ...	Integrando de *a* a *b* obtenemos ...
aceleración respecto al tiempo	la velocidad del tiempo *a* a *b*.
velocidad respecto al tiempo	el desplazamiento del tiempo *a* a *b*.

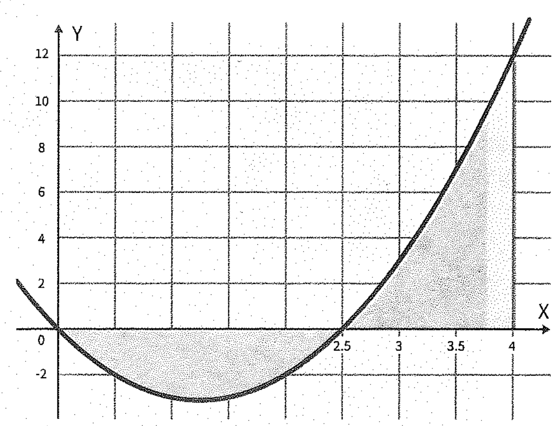


Figura 3.16

De esta forma, podemos describir por completo el movimiento de un objeto en el espacio. Veamos un ejemplo.

Un objeto se mueve con movimiento rectilíneo y su velocidad en el instante t está dada por la función $v(t) = 2t^2 - 5t$.

Determina

- el desplazamiento del objeto durante los primeros cuatro segundos.
- la distancia recorrida durante ese tiempo.
- la aceleración instantánea a los cuatro segundos.

Por la segunda tabla, observamos que la integral de la función de velocidad nos regresa el desplazamiento, por lo tanto el desplazamiento durante los primeros cuatro segundos es

$$\int_0^4 v(t)dt = \int_0^4 2t^2 - 5t\,dt = 2\left(\frac{64}{3}\right) - 5\left(\frac{16}{2}\right) = \frac{8}{3}.$$

Para resolver el segundo punto, es importante observar la gráfica de la función $v(t)$. Como en el intervalo $[0, 2.5]$ la función $v(t)$ es negativa, eso quiere decir que el objeto tenía velocidad negativa, es decir, se movía en sentido contrario al sistema de referencia. Para determinar la distancia, lo que tenemos que hacer es calcular el área absoluta bajo la curva, de esa manera omitiremos el signo negativo de la velocidad.

TIC

Ingresa a la liga para hacer un repaso de la ley de Hooke.

bkmrt.com/w98BkH

Así, la distancia recorrida durante los primeros cuatro segundos es

$$\int_0^4 |v(t)|dt = \int_0^{2.5} -v(t)dt + \int_{2.5}^4 v(t)dt = -\left(-\frac{125}{24}\right) + \frac{189}{24} = \frac{314}{24} = \frac{157}{12}.$$

Para finalizar con este ejercicio, debemos recordar que la derivada de la velocidad es la aceleración, por lo tanto la aceleración a los cuatro segundos es $v'(4) = 16 - 5 = 11$.

La integral definida en el trabajo

La integral definida también juega un papel muy importante en la noción del trabajo y fuerza. En mecánica clásica, se dice que una fuerza realiza trabajo cuando hay un desplazamiento de su punto de aplicación. El trabajo de la fuerza sobre ese cuerpo será equivalente a la energía necesaria para desplazarlo.

Vamos a analizar el concepto de fuerza. La idea intuitiva que debes tener en mente es cuando empujas una caja en el piso. Para empujar la caja debes ejercer cierta cantidad de fuerza $F(x_1)$ y como resultado, la caja se moverá una distancia Δx_1. De esta forma, el trabajo realizado será

$$w_1 = F(x_1)\Delta x_1.$$

De esta forma, si lo que uno quiere es determinar el trabajo necesario del momento a al b tenemos que

$$w = \int_a^b F(x)dx.$$

Veamos un ejemplo concreto. Un resorte tiene una longitud en reposo de 8 centímetros. Si una fuerza de 20 N estira el resorte medio centímetro, determina el trabajo realizado al estirar el resorte de 8 a 11 centímetros.

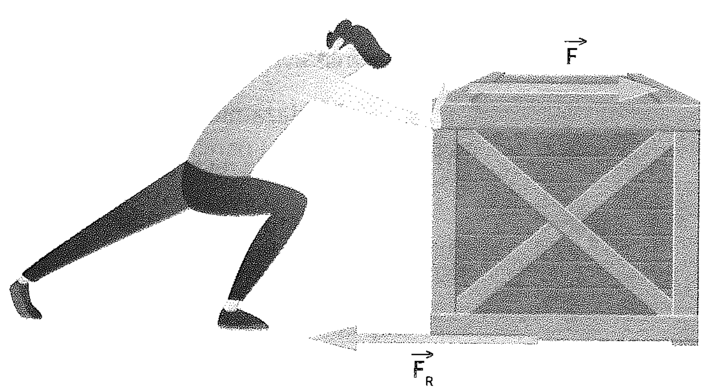


Figura 3.17

Por la ley de Hooke tenemos que $F = kx$. En este caso, como $x = 0.5$ cm, entonces cuando la fuerza F es 20 N tenemos que $20 = \frac{k}{2}$, es decir, $k = 40$.

Con esto concluimos que $F = 40x$, por lo tanto el trabajo necesario para estirar el resorte de 8 a 11 centímetros está dado por

$$\int_0^{11-8} 40x\,dx = 40\int_0^3 x\,dx = 180.$$

Las siguientes dos secciones son aplicaciones de la integral ligeramente más complicadas y por eso sólo se mencionarán, pero no veremos ejercicios ni problemas al respecto.

La **densidad** es una magnitud referida a la cantidad de masa en un determinado volumen de una sustancia o un objeto sólido. La densidad media es la relación entre la masa de un cuerpo y el volumen que ocupa en el espacio y está dada por la formula $\rho = \frac{m}{V}$.

De esta fórmula, integrando obtenemos que $m = \int \rho dV$.

Es decir, la masa en un medio la determinamos por las variaciones de la presión respecto al volumen.

Algunas características naturales como el habitat o la cantidad de alimento inhiben o alientan el crecimiento de las poblaciones. Si supones que P representa la población y M la población máxima ideal, tenemos que

$$\int \frac{dP}{P(M-P)} = \alpha t + c,$$

donde α es una constante de la población.

Actividad de aprendizaje 9

Responde en tu cuaderno cada uno de los siguientes problemas. No olvides hacer todos los pasos, justificar tu razonamiento y hacer las gráficas correspondientes.

1. Un objeto se mueve y su velocidad en el instante t está dada por la función $v(t) = t^3 - \frac{5}{3}$. Determina:

   a. El desplazamiento del objeto durante los primeros diez segundos.

   b. La distancia recorrida durante ese tiempo.

   c. La aceleración instantánea a los cuatro segundos.

   d. Describe el movimiento del objeto.

2. Un objeto se mueve, iniciando en reposo, y su aceleración al origen se comporta de manera lineal con pendiente uno. Determina:

   a. El desplazamiento del objeto durante la primera hora.

   b. La velocidad del objeto durante la primera hora.

   c. La distancia recorrida durante ese tiempo.

   d. Describe el movimiento del objeto.

3. Un resorte tiene una longitud en reposo de un decímetro. Si una fuerza de 100 N estira el resorte dos centímetros, determina el trabajo realizado al estirar el resorte de uno a dos decímetros.

4. Elabora una infografía acerca de la ley de Hooke, densidad y del modelo de crecimiento poblacional.

¿Integrar la función velocidad, integrar la función aceleración?

En la sección anterior vimos cual era el uso de la integral definida en varias aplicaciones de la vida diaria. Ahora veremos qué sucede con la integral indefinida y su relación con la cinemática.

En la sección previa vimos que la relación entre la aceleración, la velocidad y la integral se puede resumir en la tabla.

La función de ...	Integrando de *a* a *b* obtenemos ...
aceleración respecto al tiempo	la velocidad del tiempo *a* a *b*.
velocidad respecto al tiempo	el desplazamiento del tiempo *a* a *b*.

Con esto, podemos asumir que

- La **integral indefinida** de la función de **aceleración** nos devuelve la función de **velocidad**.
- La **integral indefinida** de la función de **velocidad** nos devuelve la función de **desplazamiento**.

Veamos un ejemplo. Imagina que una partícula que inicia a cinco unidades el origen tiene una velocidad dada por la función $v(t) = 5\operatorname{sen}(2t)$.

Vamos a determinar la función de desplazamiento y a analizar su gráfica.

Como la función $V(t) = -\frac{5}{2}\cos(2t)$ es una primitiva de la función $v(t)$, tenemos que

$$\int v(t)dt = -\frac{5}{2}\cos(2t)+c.$$

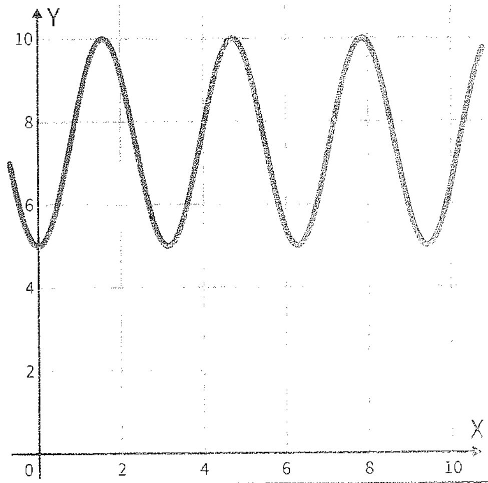


Figura 3.18

Previamente concluimos que la integral indefinida de la velocidad era la función de desplazamiento, por lo tanto $d(t)=-\frac{5}{2}\cos(2t)+c$. Lo único que nos hace falta es determinar la constante c. Esto lo averiguamos del enunciado, como la partícula inicia a 5 unidades del origen tenemos que

$$5=d(0)=-\frac{5}{2}\cos(0)+c,$$

por lo tanto $c=\frac{15}{2}$.

Con esta información concluimos que la gráfica de la función de desplazamiento es la siguiente.

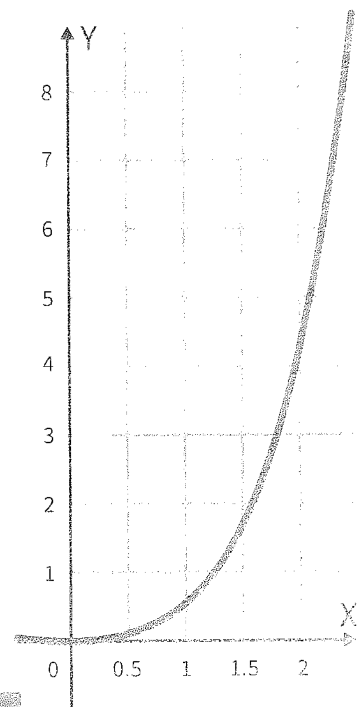


Figura 3.19

De esta gráfica podemos concluir que la partícula se aleja cierta distancia del origen y en un momento se vuelve a acerca, luego se aleja nuevamente y repite el patrón.

Veamos otro ejemplo. Un objeto que inicia en reposo y en el origen viaja en el espacio y rompiendo todas las leyes de la física tiene una aceleración dada por $a(t) = t^3 + t + 1$.

Determina la función que mide el desplazamiento del objeto y realiza la gráfica de esa función.

En este caso, tenemos que recordar que la integral y la derivada son operaciones contrarias, por lo tanto, si integramos la función de aceleración obtenemos la función de velocidad.

$$v(t)=\int a(t)dt=\int t^3+t+1dt=\frac{1}{4}t^4+\frac{1}{2}t^2+t+c_1.$$

Observa que estamos usando integrales indefinidas, ya que lo que nos interesa es obtener la función de velocidad y no la velocidad en un momento dado. También de manera implícita estamos usando el teorema fundamental del cálculo.

Ahora, si integramos la función de velocidad, recuperamos la función de desplazamiento,

$$d(t)=\int v(t)dt=\int \frac{1}{4}t^4+\frac{1}{2}t^2+t+c_1\,dt=\frac{1}{20}t^5+\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{3}t^2+c_1t+c_2.$$

Para finalizar debemos decidir los valores de las constantes c_1 y c_2. En este caso, como inicia en el origen, tenemos que $d(0) = 0$ y como inicia en reposo, tenemos que $v(0) = 0$, por lo tanto, tenemos que

$$c_1=0 \text{ y } c_2=0.$$

Por lo tanto, la función de distancia es

$$d(t)=\frac{1}{20}t^5+\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{3}t^2.$$

Puedes corroborar que la gráfica de la función $d(t)$ es la Figura 3.19.

Como puedes apreciar, la integral y la derivada son dos herramientas de la matemática, fundamentales para la física y no debes sorprenderte, Newton y Leibniz inventaron el cálculo diferencial e integral, motivados por entender los fenómenos de velocidad y aceleración instantánea.

Para finalizar el libro, te invitamos a que hagas un repaso del material visto, te puede ser útil en algunas circunstancias y, sobre todo, si estudias alguna ciencia exacta o una ingeniería.

Actividad de aprendizaje 10

Responde en tu cuaderno cada uno de los siguientes problemas. No olvides hacer todos los pasos, justificar tu razonamiento y hacer las gráficas correspondientes.

1. Una partícula que inicia a dos unidades del origen tiene una velocidad dada por la función

$$v(t) = e^t.$$

Determina la función de desplazamiento, de aceleración y analiza el movimiento de la partícula.

2. Un objeto que inicia con una velocidad de 10 cm/s y a una distancia de dos cm del origen viaja en el espacio, y rompiendo todas las leyes de la física tiene una aceleración dada por

$$a(t) = e^t + t.$$

Determina la función de desplazamiento, de velocidad y analiza el movimiento de la partícula con las tres gráficas.

Actividad de aprendizaje 11

Productos esperados

Un objeto que viaja en línea recta con una velocidad constante de 8 m/h y a una distancia de 20 cm del origen viaja en el espacio Determina la función de desplazamiento, de velocidad y analiza el movimiento de la partícula con las tres gráficas.

Realiza todas tus cuentas en hojas aparte y las gráficas en papel milimétrico. Al final, elabora un resumen con todas tus ideas acerca del movimiento de un móvil en línea recta con velocidad constante.

Entrena tus conocimientos

Responde los ejercicios usando lo aprendido en este parcial.

1. Dada la función $f(x) = x^3 - 2x$, calcula la suma de Riemann para $n = 2, 4, 8, 16, 32$ y 64, en el intervalo $[0, 5]$. Y con base en la tabla, calcula la integral definida de dicha función de 0 a 10.

2. Realiza una gráfica que presente el área bajo la función del ejercicio anterior.

3. Determina las siguientes integrales definidas. En tu cuaderno escribe todas las cuentas y sé preciso con las propiedades y teoremas que uses en cada paso.

a. $\int_0^{10} x^2 + x + 1dx$ b. $\int_{-\pi}^{\pi} \left(x^3 - \pi\right)dx$ c. $\int_{\pi}^{2\pi} \operatorname{sen}(x) + \cos(x)dx$

d. $\int_1^{e} (\ln t - 3)^3 dt$ e. $\int_0^{2} e^{x+1} dx$ f. $\int_2^{4} 2^x x^2 dx$

g. $\int_1^{5} \cos(\ln x)dx =$ h. $\int_0^{2\pi} \cos(x) + 4y\,dx$ i. $\int_1^{e} e^{2x} + \ln x\,dx$

4. Calcula la longitud de arco de la curva dada por la función $f(t) = 9t^3$, con t en el intervalo cerrado de 0 a 5.

5. Determina el área delimitada por las curvas:

$$f(x) = x^2 \text{ y } g(x) = x^3.$$

6. Calcula el volumen de una esfera de radio $4R$. Realiza la gráfica que determine la función que usarías para girar y sobre cuál de los ejes sería, si quisieras formar la esfera mediante sólidos de revolución.

7. Tenemos un tinaco cilíndrico que fue construido a través de un rectángulo de altura de 100 cm. Llenamos nuestro tinaco y observamos que tiene una fuga, de forma que

- A los cinco minutos el nivel del agua ha bajado 20 cm.
- A la media hora sólo tenemos 15 cm de agua.

Determina:

- El volumen total de agua.
- La cantidad de agua que perdimos a los 5 y 15 minutos.
- La cantidad de agua que perdimos en promedio.

8. Un objeto que viaja en línea recta con una velocidad constante de 1 km/h y a una distancia de 100 m del origen viaja en el espacio. Determina la función de desplazamiento, de velocidad y analiza el movimiento de la partícula con las tres gráficas.

Suma anécdota

En la última actividad de Construye-T vimos la importancia de la música y cómo te puede ayudar a relajarte. ¿Crees que haya una relación entre la música y la matemática? Contrario a la intuición, resulta que sí, cualquier músico debe saber matemáticas. La música y la matemática han estado en contacto desde la antigua Grecia, por ejemplo Pitágoras estudio música buscando entender por qué las cuerdas suenan diferentes, según qué tan tensas estén. Concluyó que la música y la matemática tenían que estar unidas y comenzó con el estudio de la armonía.

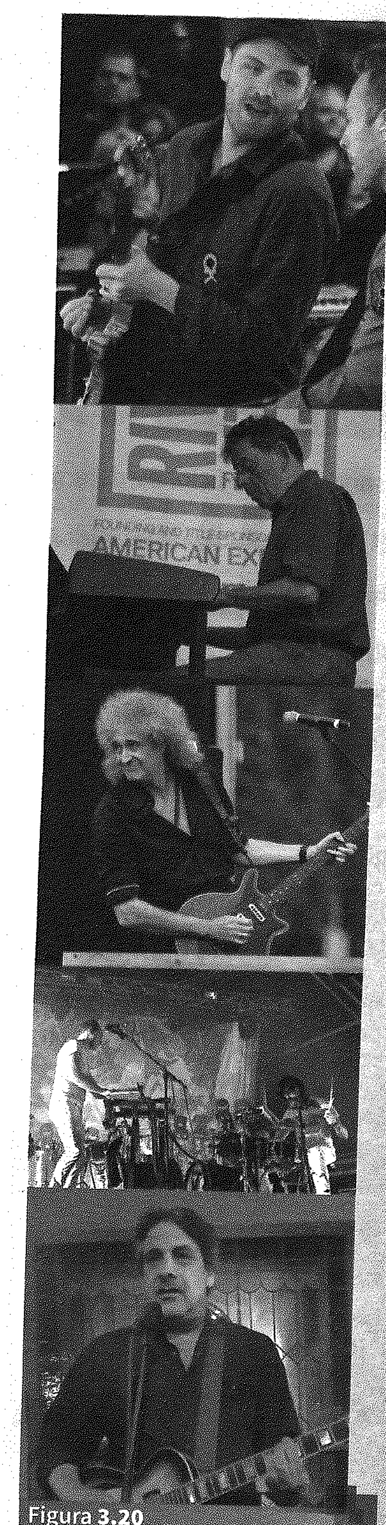


Figura 3.20

Hoy en día, incluso hay varios músicos famosos expertos en matemáticas, por ejemplo:

- Johnny Buckland de Coldplay tiene un título en Matemáticas.
- Philip Glass escribió una ópera entera, basada en matemáticas titulada: *Einstein en la playa*.
- Brian May de Queen tiene un doctorado en Astrofísica y un titulo en Matemáticas.
- Dan Snaith de Caribou tiene un doctorado en Matemáticas.
- Ethan Port (Savage Republic), Phil Alvin (The Blasters), Gregg Turner (Angry Samoans), todos tienen un título en Matemáticas.

Como puedes ver, es imposible separar a las matemáticas de la música, así que no dudes en usarla para relajarte, motivarte o incluso, para descubrir nuevas cosas.

Reflexiona y coméntalo con tus compañeros.

1. ¿Cómo administras el tiempo para tus pasatiempos y tus estudios o tu empleo?
2. Una vez que hayas decidido estudiar una carrera universitaria, ¿podrías dedicar tu tiempo a otra actividad o profesión?
3. ¿Cuáles son los aspectos o las características que consideras importantes al elegir tu carrera universitaria? ¿Cuáles al elegir un pasatiempo? ¿Son las mismas?

Proyecto integrador

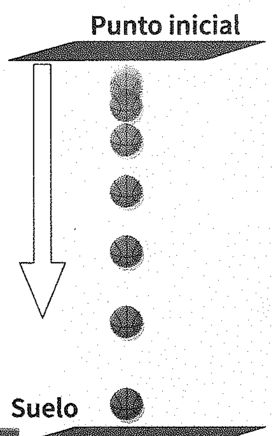


Figura 3.21

En esta ocasión, vamos a intentar obtener fórmulas para la caída libre, para ello, bajo la supervisión de tu profesor, vamos a realizar la actividad.

En esta actividad necesitas: una pelota, un celular que grabe (de preferencia en cámara lenta), un segundero.

Determinen una distancia desde la cual dejarán caer la pelota (por ejemplo, metro y medio). Una vez que tengan la distancia, coloquen marcas de referencia a la misma distancia (por ejemplo 10 cm, y así tendrían 15 marcas).

Desde la distancia que eligieron, dejen caer la pelota. Graben cómo cae la pelota y el tiempo que le llevó. Usando las marcas y el segundero o la grabación, determinen la velocidad promedio de la pelota entre la mayor cantidad de marcas posibles.

Usando sus mediciones, determinen una función $v(t)$ que aproxime lo mejor posible la velocidad:

$v(t) =$ ______________________________

Usando la integral definida, determinen cuál sería la distancia recorrida.

$d(t) =$ ______________________________

¿La distancia recorrida coincide con la distancia que recorre la pelota? Expliquen por qué puede que su medición sea incorrecta

Ahora deriven su función $v(t)$

$a(t) =$ ______________________________

¿Obtuvieron algo cercano a la constante de gravedad? Expliquen por qué puede que su medición sea incorrecta y por qué debería ser la constante de gravedad lo que debería salir.

Al final, elaboren un escrito con todo lo que obtuvieron de esta actividad y guárdenlo en su portafolio de evidencias.

Modelación y análisis de situaciones cotidianas

Por naturaleza, el humano es curioso y trata de darle una explicación a las situaciones que se le presentan, por lo que las matemáticas, como base, son una herramienta muy poderosa para este fin.

El uso del internet y de las redes sociales ha traido consigo el análisis del crecimiento poblacional en dicho medio, así como la dinámica que se presenta entre los usuarios de estas. Dicho comportamiento es equivalente al que se da entre las bacterias.

Hacia la prueba Planea

1. El crecimiento de la bacteria RH2134 por hora se muestra en la tabla.

Hora	1	2	3
Núm. de bacterias	1 500	3 000	4 500

¿Cuál es la ecuación con la que se calcula un salario?

a. $y = 1\,500x$

b. $y = 1\,500x + 1\,500$

c. $y = 3\,000 - 1\,500x + 1\,500x^2$

d. $y = 3\,000 + 1\,500x - 1\,500x^2$

2. Cierta compañía productora de tabletas generó las cantidades de producto presentado en la tabla:

Mes	Enero	Febrero	Marzo
Miles	205	235	265
Mes	Abril	Mayo	Junio
Miles	295	325	355

Según lo anterior, ¿cuál es la pendiente de la función que describe esta situación?

a. 19 b. 20 c. 25 d. 30

3. Si $f(x) = x^2 + x + 1$ es la regla de correspondencia, entonces el resultado de $f(2) - f(0)$ es:

a. -6 b. 0 c. 6 d. 12

4. Si $f(x) = x^3 + 2x^2 - 1$ es la regla de correspondencia, entonces el resultado de $f(3) - f(2)$ es:

a. 19 b. 20 c. 29 d. 30

5. La distancia que recorre un tren durante cierto intervalo de tiempo está dada por la tabla:

Distancia (m)	0	5	10
Tiempo (seg)	1	2	3

¿Qué expresión algebraica es la que se asocia a la distancia recorrida por el tren?

a. $y = 5x$

b. $y = 5x - 5$

c. $y = 5x + 5$

d. $y = x^2 - 5x + 5$

6. Juan registró en un partido de beisbol de sus compañeros la distancia y el tiempo de la pelota. La tabla presenta la distancia que recorrió una pelota en el tiempo dado.

Tiempo (seg)	0	1	2
Distancia (m)	0	5	20

¿Cuál es la regla de correspondencia entre el tiempo transcurrido y la distancia recorrida?

a. $15t - 10$

b. $25t - 30$

c. $5t^2$

d. $5t^3$

7. En una tienda de videojuegos y accesorios en línea, la tabla muestra la cotización de un control de consola, incluyendo gastos de envío:

Núm. de frascos	3	6	9
Costo	150	240	270

¿Cuál es la expresión con la que se determina el importe de un pedido?

a. $-10x^2 + 180x - 3y = 0$

b. $-10x^2 - 180x - 3y = 0$

c. $10x^2 + 180x - 3y = 0$

d. $-10x^2 + 180x + 3y = 0$

8. Pedro acaba de comprar una mezcladora de discos de acetato en la que puede poner dos discos a la vez. La tabla presenta el registro de las revoluciones por minuto de ambos discos, girando al mismo tiempo.

Disco 1	60	141	213
Disco 2	20	65	105

Identifica la ecuación que los relaciona.

a. $d_2 - d_1 = 0$

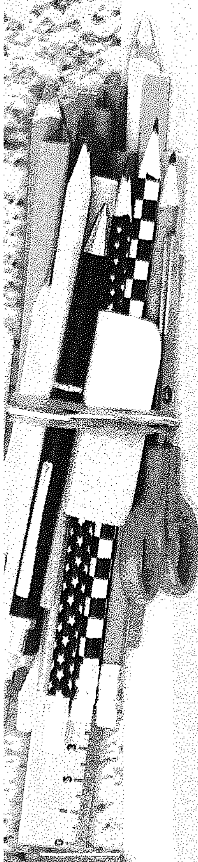
b. $d_2 - d_1 + 24 = 0$

c. $9d_2/5 - d_1 + 24 = 0$

d. $9d_1/5 - d_2 = 0$

Evalúa tus evidencias

Productos	Criterios	Sí	No
Resolución situaciones del llenado de recipientes con flujo constante	Las situaciones presentadas son acordes con el tema visto.		
	Se apoya la información con gráficas claras.		
	Se da una conclusión significativa.		
Encontrar la posición de un móvil que se desplaza en línea recta con velocidad constante	Se presenta un gráfico que describe la situación.		
	El cálculo realizado es correcto y puntual.		
	Al cálculo le acompaña una conclusión puntual.		

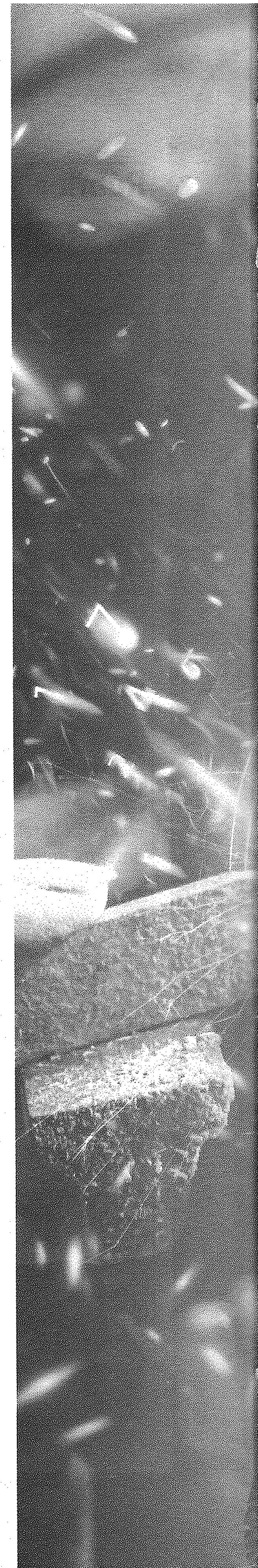


Rúbrica

Aprendizajes esperados	Básico	Autónomo	Estratégico
Reconoce el significado de la integral definida con el área bajo la curva	Comprendo el concepto de integral definida.	Entiendo el significado de la integral definida con el área bajo la curva.	Resuelvo problemas concretos relacionados con el concepto de integral definida con el área bajo la curva.
Visualiza la relación entre área e integral definida	Comprendo el concepto de integral definida y el de área bajo la curva.	Entiendo la relación entre la integral definida y el área bajo la curva.	Resuelvo problemas concretos usando la relación de la integral definida y el área bajo la curva.
Utiliza sucesiones y límites para obtener integrales definidas	Entiendo el concepto de sucesiones y de límite.	Entiendo la relación entre las sucesiones y su uso en el concepto de límites.	Determino límites para obtener integrales definidas mediante el uso de sucesiones.

Bibliografía

- Ayres, Frank y Elliot Mendelson. *Cálculo, Schaum*, McGraw-Hill/Interamericana de España, España, 2004.
- Leithold, Louis. *El Cálculo*, Universidad Iberoamericana, México, 2000.
- Spivak, Michael. *Cálculo infinitesimal*, Reverte, México, 1996.
- Stewart, James Michael. *Cálculo diferencial e integral*, Ediciones Paraninfo, México, 1999.



Descarga la App
Book Mart Digital

Cuenta con:

Videos *Documentos*

Realidad aumentada

Audios *Modelos 3D*

¡No necesitas utilizar tus datos móviles!

Paso 1

Descarga vía Wi-Fi la aplicación de Book Mart Digital.

Paso 2

Ingresa los últimos cinco dígitos del ISBN de tu libro Book Mart.

Paso 3

Activa los recursos digitales para enriquecer tu libro.

¡Conoce a talentosos youtubers!

Síguelos en nuestro canal:

http://bkmrt.com/g5V3cb

Disponible en:

App Store

Google play

www.bookmart.com.mx

Lada nacional sin costo
01 800 101 63 48

ISBN: 978-607-632-076-1

9 786076 320761